

Задание № 2

Задача 1

Сколько существует прямоугольников с целочисленными сторонами, площадь которых равна 2017. Укажите длины сторон этих прямоугольников.

Решение

Докажем сначала, что число 2017 является простым.

Так как $44^2 < 2017 < 45^2$, то, для того, чтобы доказать, что число 2017 является простым, достаточно показать, что оно не делится ни на одно из простых чисел, меньших 44.

Этими простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Число 2017 не делится на 2 и на 5, так как последняя цифра 7 на 2 и на 5 не делится. Сумма цифр числа 2017 $2+0+1+7=10$, 10 не делится на 3, значит, 2017 на 3 не делится. Разность сумм цифр числа 2017, стоящих на четных и нечетных местах, $(7+0)-(2+1)=4$ не делится на 11, значит, и число 2017 на 11 не делится.

Делимость на остальные простые числа проверяем непосредственным делением: $2017=7 \cdot 288+1$, $2017=13 \cdot 155+2$, $2017=17 \cdot 118+11$, $2017=19 \cdot 106+3$, $2017=23 \cdot 87+16$, $2017=29 \cdot 69+16$, $2017=31 \cdot 65+2$, $2017=37 \cdot 54+19$, $2017=41 \cdot 49+8$, $2017=43 \cdot 46+39$. Таким образом, число 2017 является простым. Следовательно, существует всего два прямоугольника с целочисленными сторонами, площадь которых равна 2017. Это прямоугольники со сторонами 1 и 2017 или 2017 и 1.

Ответ. 1 и 2017 или 2017 и 1.

Задача 2

Постройте график функции $y = \begin{cases} -x+5, & x < -2; \\ 2x-1, & -2 \leq x \leq 5; \\ 9, & x > 5. \end{cases}$

Решение

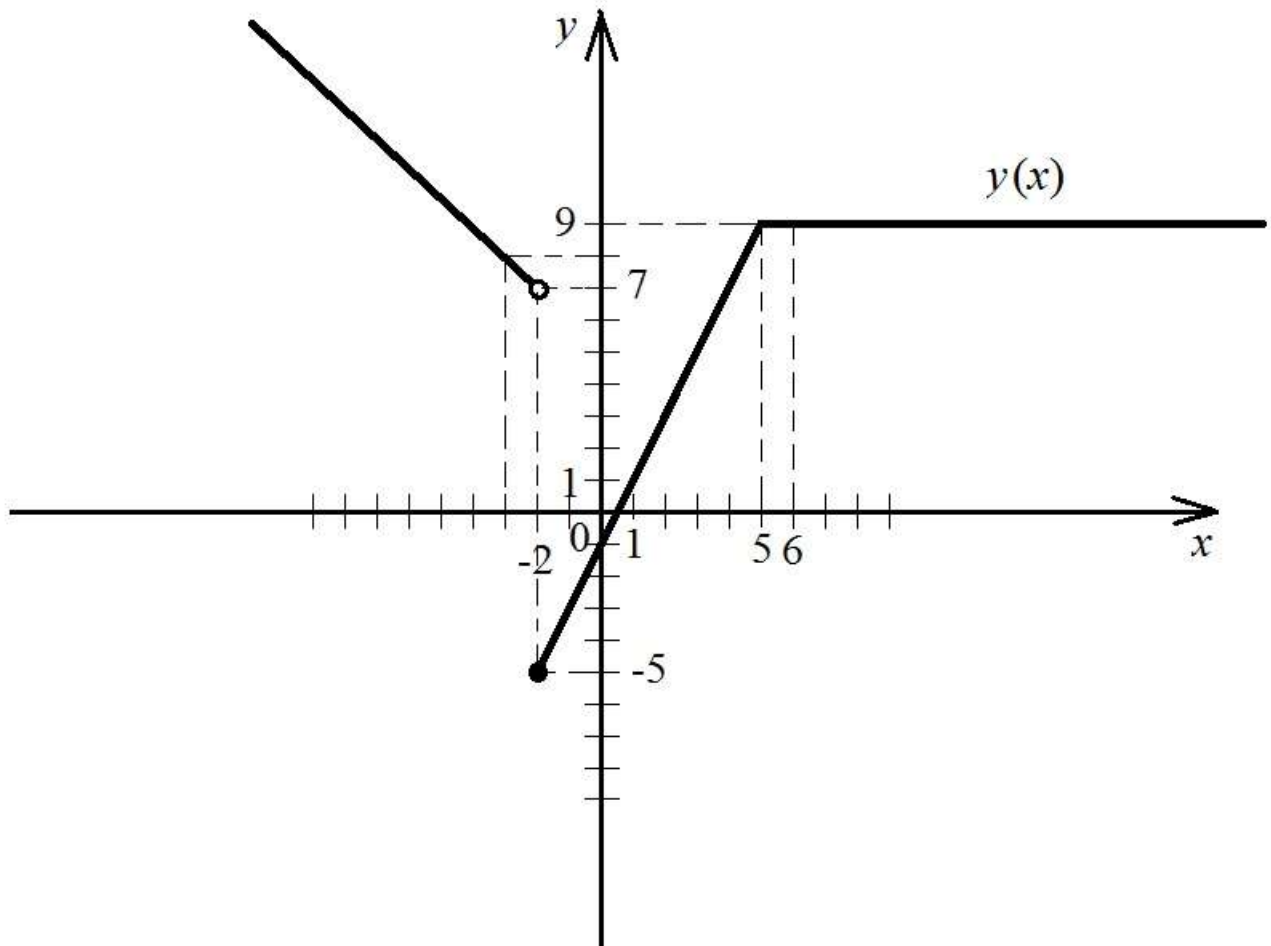
Так как графиками функций $y = -x + 5$, $y = 2x - 1$, $y = 9$ являются прямые, то график заданной функции состоит из частей трех прямых.

При $x < -2$ $y = -x + 5$, поэтому частью графика функции является открытый луч, выходящий из точки с координатами $(-2; 7)$ и проходящий через точку с координатами $(-3; 8)$; при $-2 \leq x \leq 5$ $y = 2x - 1$, поэтому частью графика функции

является отрезок, соединяющий точки с координатами $(-2; -5)$ и $(5; 9)$; при $x > 5$ $y = 9$, поэтому частью графика функции является луч, выходящий из точки с координатами $(5; 9)$ и проходящий через точку с координатами $(6; 9)$.

Точки с координатами $(5; 9)$ и $(-2; -5)$ графику функции принадлежат, а точка с координатами $(-2; 7)$ графику функции не принадлежит.

Ответ.



Задача 3

Расстояние между двумя городами по озеру на 40 км меньше, чем по шоссе. Теплоход проходит это расстояние за 8 ч 30 мин, а автобус – за 6 ч. Найдите скорость автобуса и теплохода, если скорость теплохода на 15 км/ч меньше скорости автобуса.

Решение

Пусть скорость теплохода x км/ч, тогда скорость автобуса $(x + 15)$ км/ч. Расстояние между городами по озеру равно $8,5x$ км, а по шоссе – $6 \cdot (x + 15)$ км, что по условию задачи на 40 км больше, чем по озеру. Получаем уравнение:

$$6 \cdot (x + 15) - 8,5x = 40;$$

$$6x + 90 - 8,5x = 40;$$

$$-2,5x = 40 - 90;$$

$$-2,5x = -50;$$

$$x = 20.$$

Таким образом, скорость теплохода равна 20 км/ч, тогда скорость автобуса – $20+15=35$ (км/ч).

Ответ. Скорость теплохода 20 км/ч, а скорость автобуса 35 км/ч.

Задача 4

На площади 248 га посеяли рожь, пшеницу и овес. Площадь, занятая пшеницей, составляет 40% площади, засеянной рожью, а овсом засеяно в полтора раза меньше, чем рожью. Найдите площадь, засеянную рожью, пшеницей и овсом по отдельности.

Решение

Пусть площадь, засеянная рожью, составляет x га, тогда площадь, занятая пшеницей, равна $0,4x$ га, а площадь, засеянная овсом, равна $\frac{x}{1,5}$ га. Всего рожь,

пшеница и овес вместе занимают $\left(x + 0,4x + \frac{x}{1,5}\right)$ га или 248 га. Получаем уравнение:

$$x + 0,4x + \frac{x}{1,5} = 248;$$

$$\frac{7}{5}x + \frac{2}{3}x = 248;$$

$$\frac{31}{15}x = 248;$$

$$x = \frac{248 \cdot 15}{31};$$

$$x = 120.$$

Таким образом, рожью засеяно 120 га, тогда пшеницей – $0,4 \cdot 120 = 48$ (га), а овсом – $120/1,5 = 80$ (га).

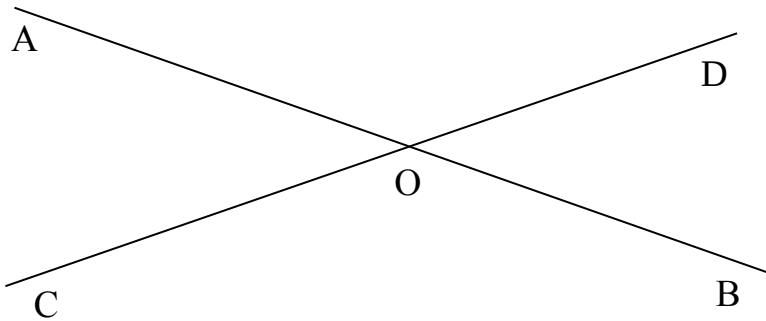
Ответ. Рожью засеяно 120 га, пшеницей – 48 га, овсом – 80 га.

Задача 5

Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 68° . Найдите величины каждого из углов, образованных при пересечении этих прямых.

Решение

Любые два из образованных четырех углов являются смежными или вертикальными. Так как сумма смежных углов равна 180° , а сумма двух углов, о которых идет речь в задаче, равна 68° , то это сумма двух вертикальных углов.



Пусть $\angle AOC + \angle BOD = 68^\circ$, тогда, в силу равенства вертикальных углов,

$$\angle AOC = \angle BOD = 68^\circ / 2 = 34^\circ.$$

По свойству смежных углов $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$, а, значит, $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$. По свойству

вертикальных углов $\angle AOD = \angle BOC = 146^\circ$.

Ответ. $\angle AOC = \angle BOD = 34^\circ$, $\angle AOD = \angle BOC = 146^\circ$.