7 класс **Решение** **20160-2017 г.**

Задание № 4

Задача 1

Число единиц двузначного числа в 3 раза меньше числа десятков. Если цифры этого числа переставить, то полученное число будет меньше данного на 36. Найдите данное число.

Решение

<u>1 способ.</u> Выпишем все двузначные числа, число единиц в которых в три раза меньше числа десятков: 31, 62, 93. Для каждого из этих чисел найдем разность между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке:

$$31–13=18,\ 62–26=36,\ 93–39=54.$$

Из трех чисел, удовлетворяющих первому условию задачи, второму условию удовлетворяет только одно: 62, которое на 36 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

<u>2 способ.</u> Пусть $\overline{ab}$ – искомое число, тогда $a = 3b$ в силу того, что число единиц в 3 раза меньше числа десятков, и $\overline{ab} - \overline{ba} = 36$, так как при перестановке цифр числа местами полученное число меньше искомого на 36. Учитывая, что $\overline{ab} = 10a + b$ и $a = 3b$, получаем уравнение

$$(10\cdot 3b + b) – (10b + 3b) = 36,$$

$$31b – 13b = 36,$$

$$18b = 36,$$

$$b = 2.$$

Таким образом, получаем, что $b = 2$, тогда $a = 3b = 3\cdot 2 = 6$. Значит, $\overline{ab} = 62$.

Ответ. 62.

Задача 2

Для каждого значения параметра a решите уравнение $3(3x+1)=a(ax-1)$.

Решение

В данном уравнении присутствуют две переменные a и x, но у этих переменных разный смысл: x – неизвестная, a – постоянная (которая получила название параметр). Специфика задач с параметром состоит в следующем: рассматривается не одно уравнение, а целое семейство уравнений одновременно, в котором каждое уравнение семейства получается при конкретном значении параметра. Так как параметр может принимать бесконечное множество различных значений, то выписать все уравнения семейства мы не сможем. Однако каждое уравнение семейства должно быть решено.

Чтобы решить каждое из уравнений заданного семейства поступают следующим образом: все множество допустимых значений параметра (тех значений, при которых уравнение имеет смысл) разбивают на подмножества и решают задачу на каждом из подмножеств. Чтобы множество допустимых значений параметра разбить на подмножества, нужно найти те значения параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение задачи.

Допустимыми значениями параметра являются любые действительные числа. Преобразуем заданное уравнение.

$$9x+3=a^2x-a;$$

$$a+3=a^2x-9x;$$

$$(a^2-9)x=a+3;$$

$$(a-3)(a+3)x=a+3.$$

После преобразований мы получили линейное уравнение с параметром. Качественное изменение линейного уравнения с параметром происходит при тех значениях параметра, при которых коэффициент при неизвестной становится равным нулю. Таким образом, допустимые значения параметра разбиваются на три подмножества.

1) $a + 3 = 0$, $a = –3$. При этом значении параметра уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$. Решением такого уравнения будут любые действительные значения x.

2) $a – 3 = 0$, $a = 3$. При этом значении параметра уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 6$. Полученное уравнение решений не имеет.

3) $(a + 3)(a – 3) \neq 0$, $a \neq \pm 3$. При этих значениях параметра коэффициент при неизвестной отличен от нуля, следовательно, для решения уравнения обе части уравнения на этот коэффициент нужно разделить:

$$x = \frac{a+3}{(a-3)(a+3)};$$

$$x = \frac{1}{a-3}.$$

Ответ. При $a = –3$ x – любое действительное число;

при $a = 3$ уравнение корней не имеет;

при $a \neq \pm 3$ $x = \dfrac{1}{a-3}$.

Задача 3

Разложите на множители многочлен $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

Решение

1 способ. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=$

$$=a(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)+b(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)+c(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=$$

$$=ab^3-3ab^2c+3abc^2-ac^3+bc^3-3bc^2a+3bca^2-ba^3+ca^3-3a^2bc+3ab^2c-b^3c=$$

$$=ab^3-ac^3+bc^3-ba^3+ca^3-b^3c=$$

$$=(ab^3-b^3c)+(ca^3-ac^3)+(bc^3-ba^3)=$$

$$=b^3(a-c)+ac(a^2-c^2)-b(a^3-c^3)=$$

$$=b^3(a-c)+ac(a-c)(a+c)-b(a-c)(a^2+ac+c^2)=$$

$$=(a-c)(b^3+ac(a+c)-b(a^2+ac+c^2))=$$

$$=(a-c)(b^3+a^2c+ac^2-ba^2-bac-bc^2)=$$

$$=(a-c)((b^3-bc^2)+(a^2c-ba^2)+(ac^2-bac))=$$

$$=(a-c)(b(b^2-c^2)-a^2(b-c)-ac(b-c))=$$

$$=(a-c)(b(b-c)(b+c)-a^2(b-c)-ac(b-c))=$$

$$=(a-c)(b-c)(b(b+c)-a^2-ac)=(a-c)(b-c)(b^2+bc-a^2-ac)=$$

$$=(a-c)(b-c)((b^2-a^2)+(bc-ac))=$$

$$=(a-c)(b-c)((b-a)(b+a)+c(b-a))=$$

$$=(a-c)(b-c)(b-a)(a+b+c).$$

2 способ. Обозначим заданный многочлен, зависящий от трех переменных, как $P(a,b,c)=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$. Многочлен $P(a, b, c)$ является однородным многочленом четвертой степени, так как все составляющие его одночлены имеют четвертую степень. Кроме того, многочлен $P(a, b, c)$ не изменяется при любой перестановке его переменных, то есть является симметрическим многочленом.

Заметим, что при $a = b$ $P(a,a,c) = a(a-c)^3 + a(c-a)^3 + c(a-a)^3 = 0$. Аналогично, при $a = c$ $P(a, b, a) = 0$; при $c = b$ $P(a, b, b) = 0$. Значит, $P(a, b, c)$ можно представить в виде:

$$P(a,b,c) = (b-c)(a-c)(b-a)\cdot Q(a,b,c).$$

Обозначим, $R(a,b,c) = (b-c)(a-c)(b-a)$. Так как $R(a, b, c)$ – симметрический многочлен третьей степени, а $P(a, b, c)$ – симметрический многочлен четвертой степени, то $Q(a, b, c)$ – симметрический многочлен первой степени, следовательно, $Q(a, b, c) = k(a + b + c)$. Таким образом,

$$P(a,b,c) = k(b-c)(a-c)(b-a)(a+b+c).$$

Для нахождения постоянного множителя k найдем значение многочлена $P(a, b, c)$ при $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$. $P(0,1,2) = 0\cdot(1-2)^3 + 1\cdot(2-0)^3 + 2\cdot(0-1)^3 = 8-2 = 6$; $P(0,1,2) = k(1-2)(0-2)(1-0)(0+1+2) = 6k$. Значит, $6k = 6$, $k = 1$. Следовательно,

$$P(a,b,c) = (b-c)(a-c)(b-a)(a+b+c).$$

Ответ. $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (b-c)(a-c)(b-a)(a+b+c)$.

Задача 4

Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне этого треугольника построены равносторонние треугольники ABC_1 и BCA_1 соответственно. Докажите, что $CC_1 = AA_1$.

Решение

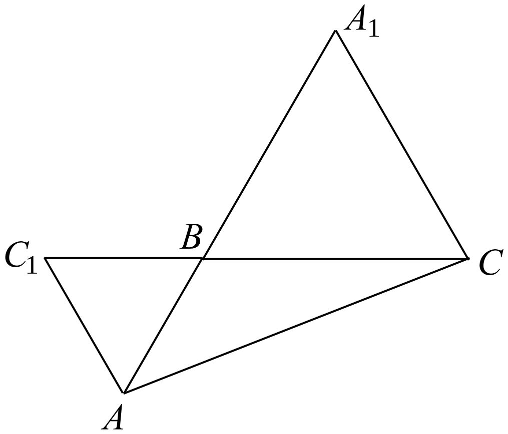

Рис. 1

<u>1 случай.</u> В ΔABC $\angle ABC = 120°$ (рис. 1). Так как ΔABC_1 и ΔBCA_1 – равносторонние, то $\angle ABC_1 = 60°$ и $\angle A_1BC = 60°$, следовательно, $\angle CBC_1 = \angle ABC_1 + \angle ABC = 60° + 120° = 180°$, то есть $\angle CBC_1$ – развернутый, значит, $C_1 \in BC$. Тогда $CC_1 = BC + BC_1$.

Аналогично, $A_1 \in BA$. Тогда $AA_1 = BA + BA_1$.

Так как ΔABC_1 и ΔBCA_1 – равносторонние, то $BA = BC_1$, $BC = BA_1$. Таким образом, $CC_1 = BC + BC_1 = BA_1 + BA = AA_1$.

<u>2 случай.</u> В ΔABC $\angle ABC < 120°$ (рис. 2).

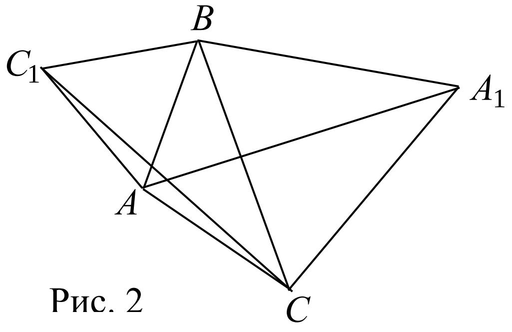

Рис. 2

Так как ΔABC_1 и ΔBCA_1 – равносторонние, то $BA = BC_1$, $BC = BA_1$, $\angle ABC_1 = 60°$ и $\angle A_1BC = 60°$. Значит, $\angle ABC_1 = \angle A_1BC$.

Рассмотрим ΔBAA_1 и ΔBC_1C.

$BA = BC_1$, $BC = BA_1$ как стороны равносторонних треугольников,

$\angle CBC_1 = \angle ABC_1 + \angle ABC = \angle A_1BC + \angle ABC = = \angle ABA_1$.

Значит, $\Delta BAA_1 = \Delta BC_1C$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AA_1 = CC_1$.

<u>3 случай.</u> В ΔABC $\angle ABC > 120°$ (рис. 3).

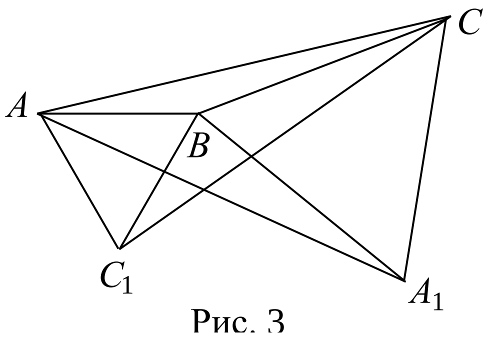

Рис. 3

Аналогично 2 случаю $BA = BC_1$, $BC = BA_1$, $\angle ABC_1 = \angle A_1BC$.

Рассмотрим ΔBAA_1 и ΔBC_1C.

$BA = BC_1$, $BC = BA_1$ как стороны равносторонних треугольников,

$\angle CBC_1 = \angle A_1BC_1 + \angle A_1BC = \angle A_1BC_1 + \angle ABC_1 = = \angle ABA_1$.

Значит, $\Delta BAA_1 = \Delta BC_1C$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AA_1 = CC_1$.

Задача 5

В мешке лежит 101 монета. Среди них есть одна фальшивая, которая отличается от других по весу. Находить фальшивую монету не требуется. За какое наименьшее количество взвешиваний и каким образом на чашечных весах без гирь можно определить легче или тяжелее фальшивая монета?

Решение

С помощью одного взвешивания мы не сможем определить, легче или тяжелее фальшивая монета. Покажем, что двух взвешиваний будет достаточно, чтобы определить, легче или тяжелее фальшивая монета.

101 монету разделим на три части: 50 монет, 50 монет, 1 монета.

<u>1 взвешивание.</u> На каждую чашу весов кладем по 50 монет.

1.1. Если чаши находятся в равновесии, значит, фальшивой монеты на чашах весов нет, следовательно, фальшивой является оставшаяся монета.

<u>2 взвешивание.</u> Оставшуюся фальшивую монету кладем на левую чашу весов, а одну из тех монет, которые находились на чашах весов при первом взвешивании – на правую. Весы покажут, легче или тяжелее фальшивая монета.

1.2. Если при первом взвешивании монеты на одной из чаш весов легче, чем монеты на другой чаше весов, то фальшивая монета находится на весах в одной из двух групп. Берем более легкую группу из 50 монет и делим ее на две части: 25 монет и 25 монет.

<u>2 взвешивание.</u> На каждую чашу весов кладем по 25 монет из более легкой группы первого взвешивания.

2.1. Если весы окажутся в равновесии, то фальшивой монеты на весах нет, следовательно, она была в той группе при первом взвешивании, которая оказалась тяжелее. Следовательно, фальшивая монета тяжелее.

2.2. Если весы покажут, что одна из двух групп по 25 монет легче, чем другая, значит, фальшивая монета в одной из двух групп на весах. Следовательно, фальшивая монета при первом взвешивании была в той группе из 50 монет, которая оказалась легче. Значит, фальшивая монета легче.

Ответ. За два взвешивания.