8 класс **Решения** **2016-2017 гг.**

Задание № 1.

Задача1

Найдите остаток от деления 7^{2016} на 5.

Решение

Любое натуральное число можно представить в виде $10\cdot k+a_0$, где k – число натуральное или ноль, а a_0 – последняя цифра этого числа. Так как 10 делится на 5, то остаток от деления натурального числа на 5 совпадает с остатком от деления его последней цифры на 5. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению последней цифры числа 7^{2016}. $7^0=1$, $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3= 343$, $7^4=2401$. Далее последние цифры числа будут повторяться. Следовательно, степени числа 7 могут своей последней цифрой иметь 1, 7, 9 или 3; причем последняя цифра степени числа 7 зависит от того, какой остаток от деления на 4 имеет показатель степени. Если показатель степени делится на 4, то степень числа 7 оканчивается на 1; если показатель степени при делении на 4 имеет остаток 1, то степень числа 7 оканчивается на 7; если показатель степени при делении на 4 имеет остаток 2, то степень числа 7 оканчивается на 9; если показатель степени при делении на 4 имеет остаток 3, то степень числа 7 оканчивается на 3. $2016=4\cdot 504$, то есть, 2016 делится на 4, значит, последняя цифра числа 7^{2016} равна 1, следовательно, остаток от деления числа 7^{2016} на 5 равен 1.

Ответ. 1.

Задача 2

Найдите все целые значения x, при которых значения выражения x^4+2x^2-x+2 равно простому числу.

Решение

<u>1 способ.</u> $x^4-x\geq 0$, так как при целых значения x $x^4\geq x$.

При $x=0$ $x^4+2x^2-x+2=2$ – число простое.

Если $x\neq 0$, то $x^4+2x^2-x+2\geq 4$, так как $x^2\geq 1$. Если x число четное, то x^4+2x^2-x+2 также число четное, как сумма четных чисел, и больше 2, следовательно, составное. Если x число нечетное, то x^4 также число нечетное, следовательно, x^4+2x^2-x+2 – число четное как сумма двух четных и двух нечетных чисел, и больше 2, значит, число составное.

<u>2 способ.</u> Разложим на множители выражение x^4+2x^2-x+2:

$$x^4+2x^2-x+2=x^4+x^3-x^3+2x^2+x^2-x^2+x-2x+2=(x^4+x^3+2x^2)-$$
$$-(x^3+x^2+2x)+(x^2+x+2)=x^2(x^2+x+2)-x(x^2+x+2)+(x^2+x+2)=$$
$$=(x^2+x+2)(x^2-x+1).$$

$x^2-x\geq 0$ и $x^2+x\geq 0$, так как при целых значения x $x^2\geq |x|$, следовательно, при целых значениях x оба множителя (x^2+x+2) и (x^2-x+1) положительны.

Чтобы число x^4+2x^2-x+2 было простым, необходимо, чтобы один из множителей (x^2+x+2) или (x^2-x+1) был равен 1.

Если $x^2+x+2=1$, то $x^2+x+1=0$. Дискриминант квадратного трехчлена D=1-4·1·1<0, значит, уравнение действительных корней не имеет.

Если $x^2-x+1=1$, то $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$, x=0 или x=1.

При x=0 $x^4+2x^2-x+2=2$ – число простое.

При x=1 $x^4+2x^2-x+2=4$ – число составное.

Ответ: x=0.

Задача 3

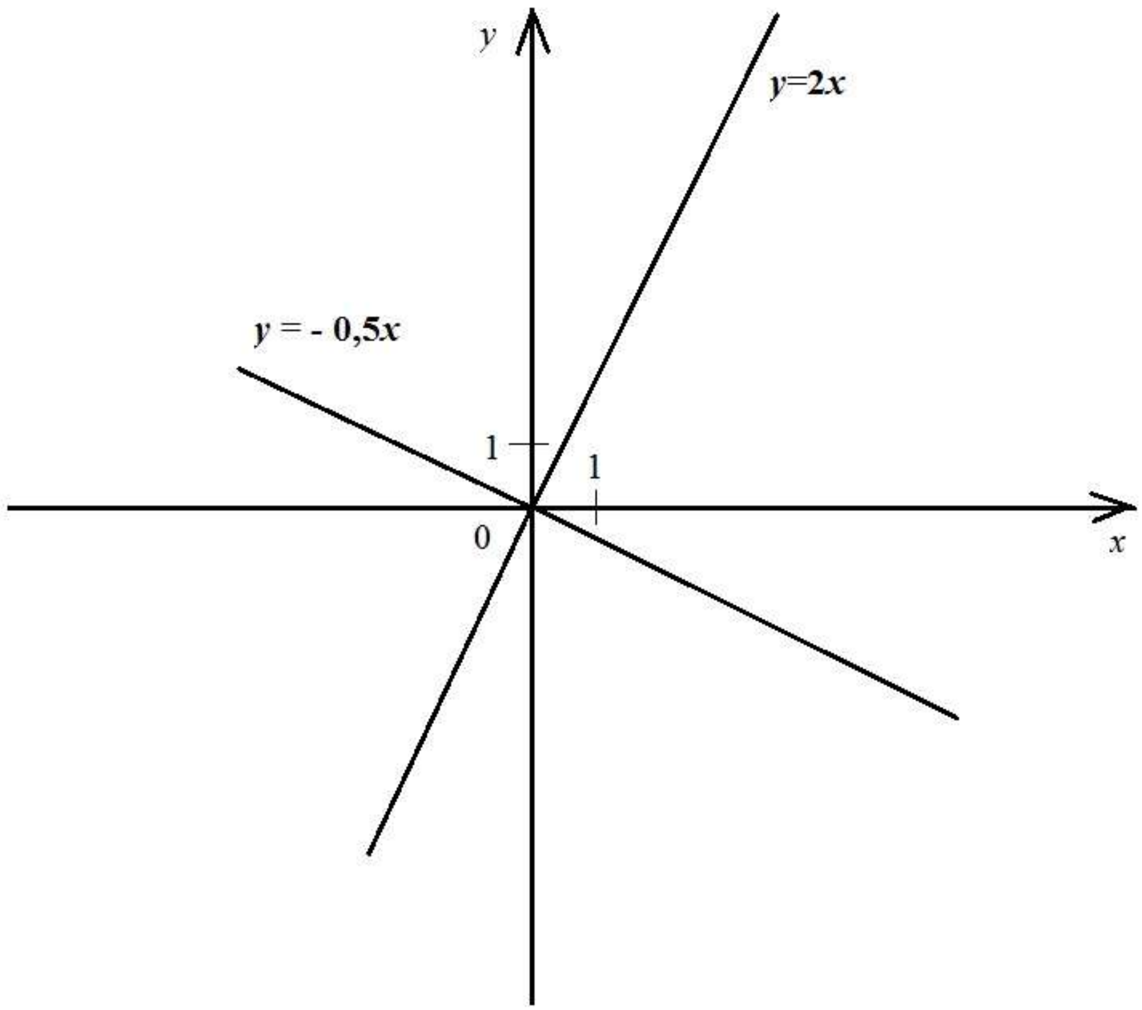
На координатной плоскости постройте множество точек, удовлетворяющих уравнению $2y^2-3xy-2x^2=0$.

Решение

$$2y^2-3xy-2x^2=2y^2-4xy+xy-2x^2=2y(y-2x)+x(y-2x)=(y-2x)(2y+x).$$

Уравнению $(y-2x)(2y+x)=0$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной плоскости, которые принадлежат прямой y=2x или прямой y=–0,5x.

Ответ.



Задача 4

Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Решение

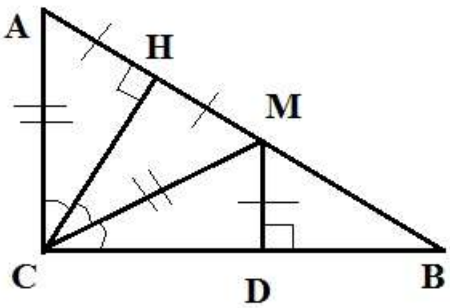
Пусть рубашка стоит x рублей, тогда брюки стоят $1{,}3x$ рублей. Пусть пиджак стоит y рублей, тогда брюки стоят $0{,}78y$ рублей. Получили, что $1{,}3x=0{,}78y$, откуда $x=\frac{0{,}78}{1{,}3}y=\frac{7{,}8}{13}y=0{,}6y$. Значит, рубашка дешевле пиджака на 40%.

Ответ. На 40%.

Задача 5

Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на 3 равные части. Найдите все углы этого треугольника.

Решение



Пусть высота CH и медиана CM делят $\angle C$ треугольника ΔABC на три равных угла: $\angle ACH=\angle HCM=\angle MCB$.

Рассмотрим ΔAHC и ΔHCM – прямоугольные ($\angle AHC=\angle MHC=90°$). CH – общий катет, $\angle ACH=\angle HCM$ – по условию. Значит, $\Delta AHC=\Delta HCM$ по катету и острому углу, следовательно, $AH=HM=0{,}5AM$; $AC=CM$.

Проведем $MD\perp BC$, $D\in BC$.

Рассмотрим ΔCDM и ΔHCM – прямоугольные ($\angle MDC=\angle MHC=90°$). CM – общая гипотенуза, $\angle HCM=\angle MCD$ – по условию. Значит, $\Delta CDM=\Delta HCM$ по гипотенузе и острому углу, следовательно, $DM=HM=0{,}5AM=0{,}5BM$.

Рассмотрим ΔBDM – прямоугольный, $\angle MDB=90°$. $DM=0{,}5BM$, то есть катет равен половине гипотенузы, значит, $\angle MBD=30°$.

Рассмотрим ΔBCH. $\angle BHC=90°$, $\angle HBC=30°$, тогда $\angle HCB=180°-\angle BHC-\angle HBC=180°-90°-30°=60°$. Следовательно, $\angle ACB=\frac{3}{2}\angle HCB=\frac{3}{2}\cdot 60°=90°$, $\angle CAB=180°-\angle ACB-\angle ABC=180°-90°-30°=60°$.

Ответ. 90°, 60°, 30°.