

Задание 1**Задача 1**

Выяснить, делится ли на **8** значение выражения $3^{162} + 2^{102} - 1$?

Решение

$(3^3)^{54}$ делится на 8 с остатком 1.

$2^{102} = (2^3)^{34}$ делится на 8 без остатка.

Значит, $3^{162} + 2^{102} - 1$ делится без остатка

Ответ: Да, делится без остатка.

Задача 2

Число лет отца на **5** больше суммы лет всех его трех сыновей. Через **10** лет отец будет вдвое старше старшего сына; через **20** лет – вдвое старше второго сына; через **30** лет – вдвое старше младшего сына. Найти возраст отца и каждого сына в настоящее время.

Решение

Обозначим возраст старшего сына через x , второго через y , младшего – через z . Тогда возраст отца в настоящее время равен $(x + y + z) + 5$.

Согласно условию, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10 + x + y + z + 5 = 2(x + 10), \\ 20 + x + y + z + 5 = 2(y + 20), \\ 30 + x + y + z + 5 = 2(z + 30). \end{cases}$$

Сложим уравнения и получим

$$60 + 3(x + y + z) + 15 = 2(x + y + z) + 2 \cdot 60$$

$$x + y + z = 60 - 15, \quad x + y + z = 45.$$

Отцу: $45 + 5 = 50$ лет.

Далее подставляя в первое уравнение системы, находим x :

$$60=2(x+10), \Rightarrow x = 20$$

Подставляя во второе уравнение системы, находим y

$$70=2(y+20), \Rightarrow y = 15.$$

Аналогично находим z

$$80=2(z+30), \Rightarrow z = 10.$$

Ответ: Отцу 50 лет, старшему сыну 20 лет, среднему – 15 лет, младшему 10 лет.

Задача 3

В таблице даны 5 значений некоторой линейной функции.

x	-7	-10	0	3	8
y	-19	-30	5	11	26

Два из пяти значений функции записаны неверно. Найти их и исправить.

Решение

Данные значений x обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ,

значения y – через y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 .

Если эти точки лежат на одной прямой, то должны выполняться:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_3}{y_1 - y_3} = \frac{x_1 - x_4}{y_1 - y_4} = \frac{x_1 - x_5}{y_1 - y_5} = \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} = \frac{x_2 - x_4}{y_2 - y_4} = \dots = \frac{x_4 - x_5}{y_4 - y_5}.$$

Вычислим значение коэффициента наклона прямой, проходящей через точки i и

$$j: \quad k_{ij} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \quad i \neq j;$$

$$k_{12} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, k_{13} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}, \dots, k_{45} = \frac{y_4 - y_5}{x_4 - x_5}.$$

$$k_{12}=3\frac{2}{3}; \quad k_{13}=3\frac{3}{7}; \quad k_{14}=3; \quad k_{15}=3;$$

$$k_{23}=3\frac{1}{2}; \quad k_{24}=3\frac{2}{13}; \quad k_{25}=3\frac{1}{9};$$

$$k_{34}=2; \quad k_{35}=2\frac{5}{8};$$

$$k_{45}=3.$$

Из полученных данных видно, что k совпадает у трёх точек (x_1, y_1) , (x_4, y_4) , $(x_5, y_5) \Rightarrow k = 3$;

Подставляя их в уравнение $y = kx + b$, найдем $b = 2$.

Получили уравнение $y = 3x + 2$.

Подставляя в него значения x_2, x_3 , находим верные значения $y_2 = -28$ и $y_3 = 2$.

Примечание.

Для наглядности полезно показать расположение этих точек на плоскости. Пять точек на плоскости могут принадлежать двум пересекающимся прямым, каждая из которых, содержит по три точки. Пересечением прямых, в этом случае является, одна из точек. Такая задача имела бы два решения.

Задача 4

Объем строительных работ увеличился на **80%**. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, если производительность труда повысится на **20%**.

Решение

Объем строительных работ примем за единицу. При увеличении на 80%, объем строительных работ стал 1,8. Производительность труда стала 1,2, если была единица.

Число рабочих стало $\frac{1,8}{1,2} = 1,5$. Оно увеличилось на $1,5 - 1 = 0,5$,

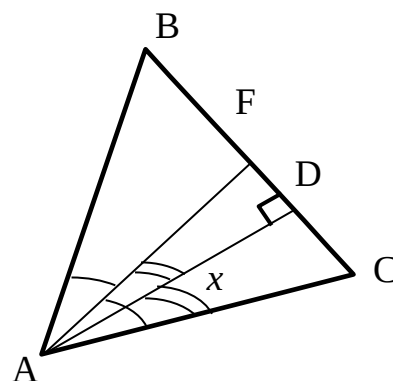
$0,5 \cdot 100 = 50\%$.

Ответ: 50%.

Задача 5

Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит пополам угол, между основанием и биссектрисой угла при основании. Найти углы равнобедренного треугольника.

Решение



Пусть AC – основание, AD – высота.

Обозначим $\angle DAC$ через x .

По условию AF - биссектриса $\angle BAC$, AD – биссектриса $\angle FAC$.

$$\angle BAC = \angle BCA = 4x$$

Рассмотрим $\triangle ADC$.

$$4x + x = 90^\circ,$$

$$5x = 90,$$

$$x = 18.$$

$$\angle BAC = \angle C = 4x = 72^\circ, \angle B = 36^\circ.$$

Ответ: $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.