

Задание № 3

Задача 1

Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 6 дает в остатке 5.

Решение.

Обозначим искомое число A . Так как A при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 6 дает в остатке 5, то число $A+1$ без остатка делится на 2, 3, 4, 5, 6. Наименьшим числом, которое без остатка делится на 2, 3, 4, 5, 6 является их наименьшее общее кратное (НОК). Так как числа 2, 3, 5 – простые, $4=2^2$, $6=2 \cdot 3$, то $\text{НОК}(2, 3, 4, 5, 6)=2^2 \cdot 3 \cdot 5=60$, то есть $A+1=60$, следовательно, $A=59$.

Ответ. 59.

Задача 2

Докажите, что число $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ является иррациональным.

Решение

Множество рациональных чисел является замкнутым относительно всех арифметических операций, то есть сумма, разность, произведение двух рациональных чисел, а при условии, что делитель отличен от нуля, частное двух рациональных чисел есть число рациональное.

Воспользуемся методом от противного. Предположим, что число $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ является рациональным. Тогда его квадрат также будет числом рациональным как произведение двух рациональных чисел.

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 = 5 - 2 \cdot \sqrt{6}.$$

Обозначим, $A = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$. Так как по предположению A – число рациональное, то $\sqrt{6} = \frac{5-A}{2}$ – число рациональное.

Докажем, что $\sqrt{6}$ – число иррациональное. Пусть это не так, и $\sqrt{6}$ – число рациональное. Тогда по определению рационального числа $\sqrt{6}$ можно представить в виде $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, где m – число целое, n – число натуральное и дробь

$\frac{m}{n}$ является несократимой. Тогда после возведения в квадрат получим

$$6 = \frac{m^2}{n^2},$$

$$6 \cdot n^2 = m^2.$$

Так как 6 – число четное, то $6 \cdot n^2$ – число четное, следовательно, и равное ему число m^2 также является четным, а, значит, m – число четное, то есть m представимо в виде $m=2 \cdot k$, где k – число целое. Тогда имеем

$$6 \cdot n^2 = (2 \cdot k)^2,$$

$$6 \cdot n^2 = 4 \cdot k^2,$$

$$3 \cdot n^2 = 2 \cdot k^2.$$

Так как 2 – число четное, то $2 \cdot k^2$ – число четное, следовательно, и равное ему число $3 \cdot n^2$ также является четным, откуда следует, что n^2 – число четное, а, значит, n – число четное, то есть n представимо в виде $n=2 \cdot l$ где l – число натуральное. Таким образом получили, что m и n – числа четные, что

противоречит предположению о том, что дробь $\frac{m}{n}$ является несократимой.

Значит, наше предположение не верно, и число $\sqrt{6}$ является иррациональным.

Так как $\sqrt{6}$ – число иррациональное, то получаем противоречие с ранее установленным результатом о том, что $\sqrt{6}$ – число рациональное. Значит, наше предположение не верно, и $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ является числом иррациональным.

Задача 3

Решите уравнение $x^4 - 4x^3 + 8x + 3 = 0$.

Решение

В левой части уравнения прибавим и вычтем $4x^2$. Получим

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 + 8x + 3 = 0.$$

Далее в левой части уравнения сгруппируем первые три слагаемых и воспользуемся формулой сокращенного умножения, а также сгруппируем четвертое и пятое слагаемые и вынесем за скобку общий множитель. Получим

$$(x^4 - 4x^3 + 4x^2) - (4x^2 - 8x) + 3 = 0,$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 4 \cdot (x^2 - 2x) + 3 = 0.$$

После преобразований получили уравнение, которое сводится к квадратному с помощью замены переменной. Пусть $y = x^2 - 2x$. Тогда получим уравнение

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Так как коэффициент перед y является четным, то для решения уравнения воспользуемся упрощенной формулой:

$$\frac{1}{4}D = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1,$$

$$y_{1,2} = 2 \pm 1; y_1 = 3, y_2 = 1.$$

Вернемся к замене. Получим

$$\begin{aligned}x^2 - 2x &= 3 \text{ или } x^2 - 2x = 1, \\x^2 - 2x - 3 &= 0 \text{ или } x^2 - 2x - 1 = 0, \\x_{1,2} &= 1 \pm 2 \text{ или } x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ответ. $-1, 3, 1 \pm \sqrt{2}$.

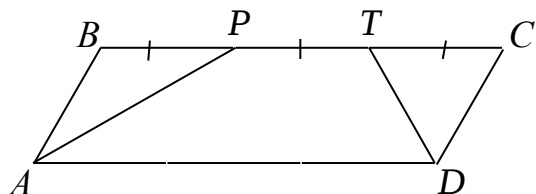
Задача 4

Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов A и D делят сторону BC на три равные части. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 40.

Решение

Условие задачи допускает две возможные конфигурации: точка пересечения биссектрис AP и DT углов A и D соответственно лежит внутри параллелограмма или вне параллелограмма.

1 случай. Биссектрисы AP и DT пересекаются вне параллелограмма. Тогда в силу условия задачи $BP = PT = TC$.



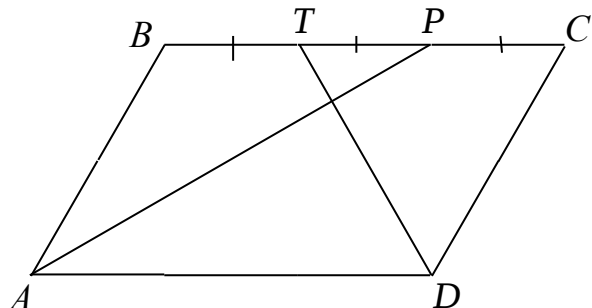
Так как AP – биссектриса $\angle BAD$, то $\angle BAP = \angle PAD$.

$\angle PAD = \angle APB$ как накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AP .

Из равенства углов $\angle BAP = \angle PAD$ и $\angle PAD = \angle APB$ следует, что $\angle BAP = \angle APB$, значит, $\triangle APB$ – равнобедренный (по признаку), следовательно, $AB = BP$.

Пусть $BP = x$. Тогда $BP = PT = TC = x$, $AB = CD = BP = x$, $BC = AD = 3BP = 3x$. Тогда периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(x + 3x) = 8x$. В силу условия задачи $P_{ABCD} = 40$, следовательно, $8x = 40$, $x = 5$. Значит, $AB = CD = 5$, $BC = AD = 3 \cdot 5 = 15$.

2 случай. Биссектрисы AP и DT пересекаются вне параллелограмма. Тогда в силу условия задачи $BT = PT = PC$.



Аналогично первому случаю устанавливаем, что $AB = BP$.

Пусть $BT = x$. Тогда $BT = PT = PC = x$, $AB = CD = BP = 2BT = 2x$, $BC = AD = 3BT = 3x$. Тогда периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(2x + 3x) = 10x$. В силу условия задачи $P_{ABCD} = 40$, следовательно, $10x = 40$, $x = 4$. Значит,

$AB = CD = 2 \cdot 4 = 8$, $BC = AD = 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ. 5, 15, 5, 15 или 8, 12, 8, 12.

Задача 5

Имеется 1 золотая, 3 серебряных и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из медалей фальшивая: легче настоящей. Настоящие медали из одного металла весят одинаково (а из разных – не одинаково). Внешне фальшивая медаль ничем не отличается от настоящей. Укажите, как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль.

Решение

1-ое взвешивание. На каждую чашу весов кладем 1 серебряную и две бронзовых медали. Возможно два случая.

1 случай. Весы в равновесии, следовательно, среди медалей, находящихся в чашах весов фальшивых нет. Тогда фальшивая медаль находится среди трех оставшихся.

2-ое взвешивание. На левую чашу весов кладем оставшуюся серебряную медаль и одну бронзовую из тех, которые находились в чашах весов при первом взвешивании; на правую – оставшуюся бронзовую медаль и одну серебряную из тех, которые находились в чашах весов при первом взвешивании. Если весы в равновесии, то фальшивой является золотая медаль; если легче медали в левой чаше весов, то фальшивой является серебряная медаль из левой чаши; если легче правая чаша весов, то фальшивой является бронзовая медаль из правой чаши.

2 случай. Содержимое одной из чаш весов при первом взвешивании легче, чем другой. Тогда фальшивая медаль находится в той чаше, которая легче.

2-ое взвешивание. На каждую из чаш весов кладем по одной бронзовой медали, лежащие на той чаше весов при первом взвешивании, содержимое которой оказалось легче. Если весы в равновесии, то фальшивой является серебряная медаль, которая при первом взвешивании лежала на той чаше весов, содержимое которой было легче. Если же весы не в равновесии, то фальшивой является та из бронзовых медалей на весах, которая легче.