

Задача 1

Используя числа $\sqrt{7}$ и $\sqrt{5}$ по два раза получить число 2.

Решение

$$(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5}) = 2.$$

Задача 2

Пусть a, b, c – три положительных числа, причем $a^2 + b^2 = c^2$. Доказать, что $a^3 + b^3 < c^3$.

Решение

Очевидно, $c = \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{a^2} = |a| = a$. Точно также $c > b$. Поэтому $a^3 < a^2c$ и $b^3 < b^2c$, т.е.

$$a^3 + b^3 < a^2c + b^2c = (a^2 + b^2)c = c^3. \text{ ч.т.д.}$$

Задача 3

Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 часов. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 часов скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Решение

Пусть x – время работы 1-го рабочего, $x + 5$ – время работы 2-го рабочего.

Первый рабочий за 1 час сделает $\frac{1}{x}$ всей работы, а за 6 часов – $\frac{6}{x}$. Второй рабочий за 1 час

сделает $\frac{1}{x+5}$, а за 6 часов – $\frac{6}{x+5}$. Работая вместе, всю работу сделали за 6 часов. Отсюда

имеем уравнение $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1$. Получаем $x = 10$, тогда $x + 5 = 10 + 5 = 15$.

Ответ: 1-й рабочий сделает всю работу за 10 часов, 2-й – за 15 часов.

Задача 4

Решить уравнение $(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0$.

Решение

Положив $y = x^2 - 3x$, получим $y^2 + 3y - 28 = 0$, $y_1 = -7$, $y_2 = 4$.

Имеем $x^2 - 3x + 7 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

$$x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -1.$$

Ответ: $x_1 = 4, \quad x_2 = -1$.

Задача 5

Доказать, что треугольники с равными периметрами и двумя соответственно равными углами равны.

Решение

По условию $a + b + c = A + B + C = P$.

Треугольники подобны по трем углам. Значит,

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{a+b+c}{A+B+C} = \frac{P}{P} = 1.$$

Отсюда $a = A, \quad b = B, \quad c = C$. Получаем, что треугольники равны по трем сторонам или по стороне и двум углам.

