9 класс **Решения** **2016-2017 гг.**

Задание 1

Задача 1

В строку одно за другим выписаны натуральные числа от 1 до 60. Из полученного числа нужно вычеркнуть сто цифр, чтобы оставшееся число было: а) наименьшим; б) наибольшим.

Решение

Всего выписано 9+51·2=111 цифр, следовательно, после вычеркивания останутся 11 цифр.
а) Вычеркиваем сначала все цифры чисел от 1 до 50 кроме нулей, получим 00000515253545555657585960. Наименьшее число, которое можно получить – 123450.
б) Вычеркиваем сначала все цифры чисел от 1 до 50, кроме девяток: 99999515253545555657585960. Наибольшее число, которое можно получить – 99999785960.
Ответ: 123450, 99999785960.

Задача 2

Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

Решение

Пусть изначально было x рядов, то есть количество солдат в роте – $24x$. В параде участвовало $(x-2)(x-2+26)=(x-2)(x+24)$ солдат. По условию задачи,

$(x-2)(x+24)<24x$,

$x^2-2x-48<0$.

Решая это неравенство, получаем $x<8$.

По условию, $24x$ – полный квадрат. Так как 24=4·6, x должно делится на 6, следовательно x=6, в роте 144 солдата.
Ответ: 144.

Задача 3

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2+y^2+4x-8y=-7 \\ 2x^2+0{,}4y^2+2x-3y=-1{,}6 \end{cases}.$$

Решение

Умножим первое уравнение на 2, второе – на 5 и вычтем из второго уравнении первое. Получим $2x+y=6$. Выразим y и подставим в первое уравнение:

$9x^2-4x-5=0$, $x_1=1$, $x_2=-5/9$.

Следовательно, $y_1=4$, $y=79/9$.
Ответ: (1,4), (-5/9,79/9).

Задача 4

Найти все тройки целых чисел (x,y,z), для каждой из которых выполняется соотношение

$$2x^2+y^2+7z^2+2x^2y^2-42z+33=0.$$

Решение

Преобразуем равенство.

$2x^2+y^2+7(z^2-6z+9)-63+2x^2y^2+33=0$,

$2x^2(1+y^2)+y^2+7(z-3)^2=30$,

$(2x^2+1)(1+y^2)+7(z-3)^2=31$.

Так как первое слагаемое всегда положительное,

$7(z-3)^2<31$, то есть $(z-3)^2$ может принимать значения 0, 1, 4.

$(z-3)^2=0$, z=3, $(2x^2+1)(1+y^2)=31$, $2x^2+1=31$, $y^2+1=1$ или $2x^2+1=1$, $y^2+1=31$.

В первом случае получаем $x^2=15$, во втором – $y^2=30$, в целых числах эти уравнения не имеют решения.

$(z-3)^2=1$, z=4 или z=2, $(2x^2+1)(1+y^2)=24$. Так как первый сомножитель – нечетное число, $2x^2+1=1$, $y^2+1=24$ или $2x^2+1=3$, $y^2+1=8$. В первом случае получаем $y^2=23$, во втором – $y^2=7$, в целых числах эти уравнения не имеют решения.

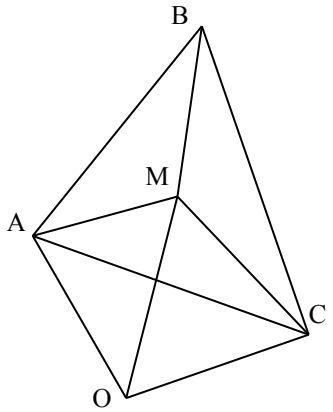
$(z-3)^2=4$, z=5 или z=1, $(2x^2+1)(1+y^2)=3$, $2x^2+1=1$, $y^2+1=3$ или $2x^2+1=3$, $y^2+1=1$. В первом случае $y^2=2$, нет решения в целых числах. Во втором - $x^2=1$, $y^2=0$, то есть $x=\pm1$, $y=0$.

Ответ: $(1,0,1)$, $(1,0,5)$, $(-1,0,1)$, $(-1,0,5)$.

Задача 5

Точка M – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Доказать, что центр окружности, проходящей через точки A, M и C, лежит на биссектрисе угла B.

Решение

Так как точка *M* лежит на пересечении биссектрис треугольника,
$\angle AMC=\pi-\alpha/2-\gamma/2=\pi/2+\beta/2$.

Пусть *O* – центр окружности, описанной около треугольника AMC. $\angle OAM=\angle OMA$, $\angle OCM=\angle OMC$, поэтому $\angle OAM+\angle OCM=\alpha/2+\gamma/2+2\angle OAC=\angle AMC$. Таким образом, $\angle OAC=\pi/2-\alpha/2-\gamma/2=\beta/2$. Следовательно, $\angle OMA=\beta/2+\alpha/2$, то есть $\angle OMA$ - смежный к углу *AMB*, точка *O* лежит на прямой *BM*.