

Задание 1**Задача 1**

Найдите

$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}.$$

Решение.

Во-первых, раскроем модуль под первым корнем:

$$12\sqrt{5} = \sqrt{144 \cdot 5} = \sqrt{720} < \sqrt{841} = 29.$$

$$\text{Поэтому } |12\sqrt{5} - 29| = 29 - 12\sqrt{5}.$$

Далее можно действовать так:

$$12\sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{20}, \quad 29 = 9 + 20, \text{ поэтому}$$

$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} = \sqrt{(\sqrt{20} - 3)^2} - \sqrt{(\sqrt{20} + 3)^2} = -6.$$

Второй способ. Найдём квадрат искомого числа:

$$\left(\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} \right)^2 = 29 - 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 29 - 2\sqrt{29^2 - (12\sqrt{5})^2} = 36.$$

Таким образом, искомое число равно (6) или (-6).

Значение выражения под первым корнем меньше значения выражения под вторым корнем, поэтому искомое число отрицательное, следовательно, оно равно (-6).

Ответ: -6.

Задача 2

Докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2},$$

где n – натуральное число, отличное от 1.

Решение.

При $n = 2$ и $n = 3$ неравенство выполнено:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} < \frac{1}{2}.$$

Обозначим через S_n сумму в левой части неравенства. Покажем, что начиная с $n = 4$ $S_n > 1/2$, то есть неравенство не выполнено.

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = S_n + \frac{3n+1}{2n(2n+1)(n+1)} > S_n,$$

$$\text{то есть суммы увеличиваются, } S_n > S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{107}{210} > \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, поскольку S_n содержит $n-1$ слагаемое, каждое из которых меньше, чем $1/n$, $S_n < 1$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} < 1 \text{ для } n \geq 4.$$

Задача 3

Из пункта А в пункт В доставлен груз. От пункта А его везли в автофургоне, а потом переложили на ожидавший грузовик, причём грузовик проехал до пункта В расстояние в три раза меньшее, чем автофургон от пункта А до места перегрузки (время, потребовавшееся на перегрузку, считается равным нулю). При этом для доставки груза из пункта А в пункт В потребовалось время, равное времени проезда из пункта А в пункт В со скоростью 64 км/ч. Если бы автофургон и грузовик выехали из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда из пункта А в пункт В со скоростью 120 км/ч. С какой скоростью ехал грузовик, если известно, что скорость автофургона не превосходит 75 км/ч?

Решение.

Пусть v км/ч – скорость грузовика, w – скорость автофургона. Двигаясь навстречу друг другу, грузовик и автофургон сближаются каждый час на $v+w$ км, то есть, по условию, скорость автофургона $w=120-v$ км/ч.

По условию задачи, $v \geq 120-75=45$ км/ч.

Пусть S – расстояние от А до В. Тогда расстояние от А до места перегрузки равно $3S/4$, а от места перегрузки до В – $S/4$. Получаем уравнение

$$\frac{3}{4(120-v)} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{64},$$

решая которое, находим

$$v_1 = 40, v_2 = 48.$$

Условию задачи удовлетворяет второй корень.

Ответ: 48 км/ч.

Задача 4

Постройте график функции

$$y = \frac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}.$$

Решение.

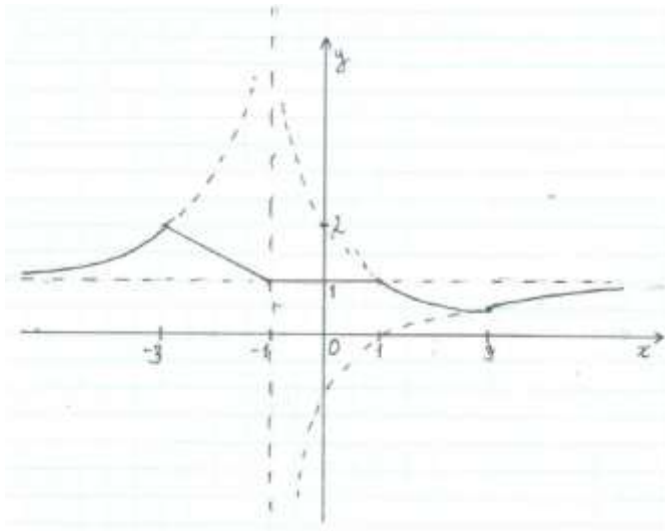
Раскрывая модули, получаем

При $x < -3$ и $x \geq 3$ $y = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ – гипербола с асимптотами $x=-1$ и $y=1$;

при $-3 \leq x < -1$ $y = \frac{1-x}{2}$,

при $-1 \leq x < 1$ $y = 1$,

при $1 \leq x < 3$ $y = \frac{2}{x+1}$.



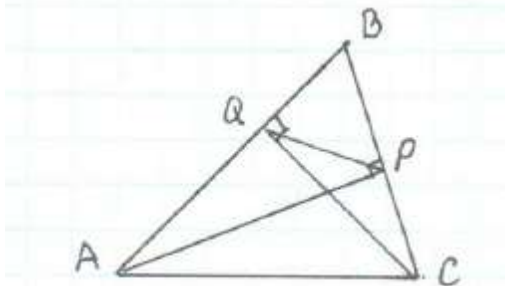
Задача 5

В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение.

Треугольник BQC – прямоугольный, $BQ = BC \cos \angle B$,

Треугольник BPA – прямоугольный, $BP = BA \cos \angle B$.



Таким образом, треугольник BPQ подобен треугольнику BCA ,

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA} = \frac{PQ}{AC} = \cos \angle B$$

Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадраты отношения соответствующих сторон,

$$(\cos \angle B)^2 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}, \quad \cos \angle B = \frac{1}{3}.$$

По теореме синусов, $R = \frac{AC}{2 \sin \angle B}$

Так как $\sin \angle B = \sqrt{1 - 1/9} = 2\sqrt{2}/3$, $AC = 3 \cdot 2\sqrt{2}$, $R = 9/2$.

Ответ: 4,5.