

Задание 2

1) Дана совокупность m различных натуральных чисел, $m > 7$. Наименьшее общее кратное всех чисел равно 210. Для любых двух чисел наибольший общий делитель больше 1. Произведение всех чисел делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти эти числа.

Решение. Так как искомые числа – делители числа 210, а $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, каждое из чисел – произведение каких либо чисел из набора $\{2, 3, 5, 7\}$.

Так как $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$, множество искомых чисел включает не менее 7 четных чисел. Всего имеется 8 чётных делителей числа 210 – 2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210. Если число 2 входит в искомый набор, то он состоит только из этих чисел. Но тогда произведение чисел равно

$$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^2, \text{ что противоречит условию задачи.}$$

Таким образом, искомый набор включает числа 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210 и имеющее с каждым из этих чисел общий делитель число $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Ответ: 6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210.

2) Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Решение. Оценим каждое слагаемое суммы:

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

...

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Таким образом,

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

3) Найти решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 x_3 x_4 = 2 \\ x_2 + x_1 x_3 x_4 = 2 \\ x_3 + x_1 x_2 x_4 = 2 \\ x_4 + x_1 x_2 x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решение. Вычитая из второго уравнения системы первое уравнение, получаем

$$(x_2 - x_1)(1 - x_3 x_4) = 0,$$

то есть $x_2 = x_1$ или $x_3 x_4 = 1$. Во втором случае, подставляя в первое уравнение, имеем $x_2 + x_1 = 2$.

Аналогично, вычитая первое уравнение из третьего и четвёртого, получаем

$$x_3 = x_1 \text{ или } x_3 + x_1 = 2,$$

$$x_4 = x_1 \text{ или } x_4 + x_1 = 2.$$

Поскольку переменные входят в систему симметрично, заключаем, что в каждом решении системы неизвестные могут принимать только одно из двух значений — α или $2-\alpha$. Рассмотрим все возможные случаи.

1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \alpha$. Тогда каждое уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha^3 &= 2, \\ \alpha^3 - 1 + \alpha - 1 &= 0, \\ (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 2) &= 0.\end{aligned}$$

Так как $\alpha^2 + \alpha + 2 > 0$, $\alpha = 1$. Получаем решение системы $(1, 1, 1, 1)$.

2) Три из четырёх неизвестных равны между собой. Пусть, например, $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, $x_4 = 2 - \alpha$. Из четвертого уравнения получаем

$$\begin{aligned}2 - \alpha + \alpha^3 &= 2, \\ \alpha(\alpha^2 - 1) &= 0, \\ \alpha = 0 \text{ или } \alpha = 1 \text{ или } \alpha = -1.\end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2$. Этот набор значений не удовлетворяет первым трём уравнениям системы.

При $\alpha = 1$ получаем решение из пункта 1).

При $\alpha = -1$ $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = 3$. Проверяем, что это решение системы. В силу симметрии получаем также решения $(3, -1, -1, -1)$, $(-1, 3, -1, -1)$, $(-1, -1, 3, -1)$.

3) Два неизвестных принимают значение α и два — $2-\alpha$. Пусть, например, $x_1 = x_2 = \alpha$, $x_3 = x_4 = 2 - \alpha$. Из четвертого уравнения получаем

$$\begin{aligned}2 - \alpha + \alpha^2(2 - \alpha) &= 2, \\ \alpha(2\alpha - \alpha^2 - 1) &= 0, \\ \alpha = 0 \text{ или } \alpha = 1.\end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 2$. Этот набор значений не удовлетворяет первым двум уравнениям. При $\alpha = 1$ получаем решение из пункта 1).

Ответ. $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, -1, -1)$, $(-1, 3, -1, -1)$, $(-1, -1, 3, -1)$, $(-1, -1, -1, 3)$.

4) При каких значениях a корни многочлена

$$2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1)$$

удовлетворяют неравенствам $x_1 < a \leq x_2$?

Решение. График функции $y = f(x) = 2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1)$ — парабола с ветвями, направленными вверх, с координатой вершины $x_0 = a + 1/2$. Так как $a < a + 1/2 \leq x_2$, равенство $a = x_2$ выполняться не может. По условию, парабола должна пересекать ось Ox в двух точках, между этими точками график лежит ниже оси Ox (функция $f(x)$ принимает отрицательные значения). То есть неравенство $x_1 < a < x_2$ выполнено в том и только в том случае, если $f(a) < 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}2a^2 - 2(2a + 1)a + a(a - 1) &< 0, \\ -a^2 - 3a &< 0, \\ a(a + 3) &> 0, \\ a < -3 \text{ или } a > 0.\end{aligned}$$

Ответ. $a \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

5) Доказать, что во всяком треугольнике ABC между его площадью S и радиусами вписанной и описанной окружности существует соотношение $S > 2\sqrt{r^3 R}$.

Решение. Пусть стороны треугольника равны a, b, c , длины высот, проведенных к этим сторонам, обозначаются через h_a, h_b, h_c .

$$1 \text{ способ. Так как } S = \frac{1}{2} h_a a = \frac{1}{2} h_b b = \frac{1}{2} h_c c = \frac{1}{2} (a + b + c) r, \\ h_a > 2r, h_b > 2r, h_c > 2r. \quad (*)$$

$$\text{Так как } S = \frac{1}{2} h_a a = \frac{1}{2} h_b b = \frac{1}{2} h_c c = \frac{abc}{4R}, \\ bc = 2Rh_a, ac = 2Rh_b, ab = 2Rh_c.$$

Перемножим эти равенства и применим (*):

$$a^2 b^2 c^2 = 8R^3 h_a h_b h_c > 64R^3 r^3, \\ S^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16R^2} > 4Rr^3.$$

Из последнего неравенства вытекает доказываемое утверждение.

2 способ. Так как длины сторон треугольника – положительные числа, справедливо неравенство

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Поскольку $a + b + c = \frac{2S}{r}$, $abc = 4RS$, отсюда получаем

$$\left(\frac{2S}{3r} \right)^3 \geq 4RS, \\ 2S^2 \geq 27r^3 R, \\ S \geq \sqrt{\frac{27}{2} r^3 R} > 2\sqrt{r^3 R}.$$