9 класс **Решения** **2015-2016**

Задание 5

Задача1

В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из неё 5 билетов. Какова вероятность того, что по крайней мере два билета выигрышные? Всего в урне 50 билетов.

Решение. Возможностей выбрать 5 билетов из 50 существует C_{50}^5. Возможностей выбрать 5 невыигрышных билетов - C_{42}^5. Возможностей выбрать 5 билетов, из которых только один выигрышный - $8C_{42}^4$. Таким образом, вероятность того, что менее двух билетов окажутся выигрышными, равна

$$\left(C_{42}^5 + 8C_{42}^4\right)/C_{50}^5 = \frac{42!45!5!\left(38+8\cdot 5\right)}{50!5!38!} = \frac{39\cdot 40\cdot 41\cdot 42\cdot 78}{46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50} = \frac{62361}{75670},$$

а вероятность противоположного события - $1-\frac{62361}{75670} = \frac{13309}{75670} \approx 0{,}176$.

Ответ: 0,176.

Задача 2

Пункты P, Q, R, S расположены так, что пункт R находится внутри треугольника PQS, соединены прямолинейными дорогами PQ, QS, SP, PR и QR. Их длины соответственно 400, 600, 300, 80 и 400 км. Из одного из этих пунктов одновременно выехали три автомобиля, едущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех автомобилей различны, причём каждый из них состоит из трёх дорог и проходит через все пункты. Второй автомобиль перед проездом третьей дороги своего маршрута встретился с третьим в одном пункте, из которого они выехали по общей дороге. Первый и второй автомобили закончили свои маршруты в одном пункте, причём первый закончил свой маршрут на час позже автомобиля, закончившего маршрут раньше других. Найти скорости автомобилей, если скорость второго на 10 км/ч больше скорости первого, а скорости всех автомобилей заключены в интервале от 95 км/ч до 125 км/ч.

Решение. Маршруты, проходящие через все пункты и состоящие из трёх дорог, имеют вид PRQS, PSQR, QRPS, QSPR, SQPR, SQRP, SPRQ, SPQR, RQSP, RQPS, RPSQ, RPQS. Три различных маршрута могут выходить, следовательно, либо из пункта S, либо из пункта R. Два из трёх маршрутов (для первого и второго автомобилей) заканчиваются в одном пункте. Это могут быть маршруты SQPR и SPQR либо RQPS и RPQS. Третий маршрут включает последнюю дорогу маршрута второго автомобиля, то есть, если маршрут второго автомобиля - SQPR, то маршрут третьего – SPRQ, если маршрут второго автомобиля SPQR, то маршрут третьего – SQRP. Аналогично, если маршрут второго автомобиля – RPQS, то маршрут третьего – RQSP, если маршрут второго – RQPS, то маршрут третьего – RPSQ.

Пусть скорости автомобилей равны, соответственно, x, y, z, причём $y=x+10$.

Предположим, маршруты автомобилей – SPQR, SQPR, SPRQ. Тогда до встречи с третьим автомобилем второй автомобиль проехал 600+400=1000 км, а третий – 300 км, то есть скорость второго автомобиля в 10/3 раз больше. Этого не может быть, так как по условию наибольшее отношение между скоростями равно 125/95=25/19.

Предположим, маршруты автомобилей – SQRP, SPQR, SQRP. Тогда до встречи с третьим автомобилем второй автомобиль проехал 300+400=700 (км), а третий – 600 км. Следовательно, $700/y = 600/z$, то есть $z = \frac{6}{7}y$. Второй автомобиль закончил движение раньше всех, поэтому, по условию,

$$\frac{600+400+80}{x}=1+\frac{300+400+400}{y},$$
$$1080y=y(y-10)+1100(y-10),$$
$$y^2+10y-11000=0,$$
$y=100$, $x=90$ - не удовлетворяет условиям задачи.

Предположим, маршруты автомобилей – RPQS, RQPS, RPSQ. Тогда до встречи с третьим автомобилем второй автомобиль проехал 400+400=800 (км), а третий – 80 км. Следовательно, скорость второго в 10 раз больше, что противоречит условиям задачи.

Предположим, маршруты автомобилей – RQPS, RPQS, RQSP. Тогда до встречи с третьим автомобилем второй автомобиль проехал 80+400=480 (км), а третий – 400 км. Следовательно, $480/y=400/z$, то есть $z=\frac{5}{6}y$. Второй автомобиль закончил движение раньше всех, поэтому, по условию,

$$\frac{400+400+300}{x}=1+\frac{80+400+600}{y},$$
$$1100y=y(y-10)+1080(y-10),$$
$$y^2-30y-10800=0,$$
$$y=120,\ x=110,\ z=100.$$

Ответ: 110 км/ч, 120 км/ч, 100 км/ч.

Задача 3

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xy+xz+yz=27 \end{cases}.$$

Решение.

Второе уравнение означает, что $\frac{yz+xz+xy}{xyz}=1$, то есть, ввиду третьего равенства, $xyz=27$. Первый способ. Предположим, x<0, y<0, z>0. Тогда из первого равенства вытекает, что z>9, а из второго – что 1/z>1. Так как система симметрична, полученное противоречие показывает, что x>0, y>0, z>0. Учитывая первое уравнение, получаем $\frac{x+y+z}{3}=3=\sqrt[3]{xyz}$. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$$

вытекает, что $x=y=z$. Следовательно, $3x=9$, $x=3$.

Второй способ. Умножим третье уравнение на z: $xyz+z^2(x+y)=27z$. С учётом первого уравнения получаем $27+z^2(9-z)=27z$, $z^3-9z^2+27z-27=0$, то есть $(z-3)^3=0$, $z=3$. Аналогично можно получить, что $x=3$ и $y=3$. Проверяем, что (3, 3, 3) – действительно решение системы.

Ответ: (3, 3, 3).

Задача 4

Определить, при каких *a* система уравнений

$$\begin{cases}(x-y)^2 = 6a-14\\ x^2+y^2 = 3(2+a)\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Первое уравнение имеет решения при $6a-14\ge 0$, то есть при $a\ge 7/3$. Правая часть второго уравнения при этом положительна, поэтому второе уравнение тоже имеет решения

На плоскости x0y решения первого уравнения – точки параллельных прямых

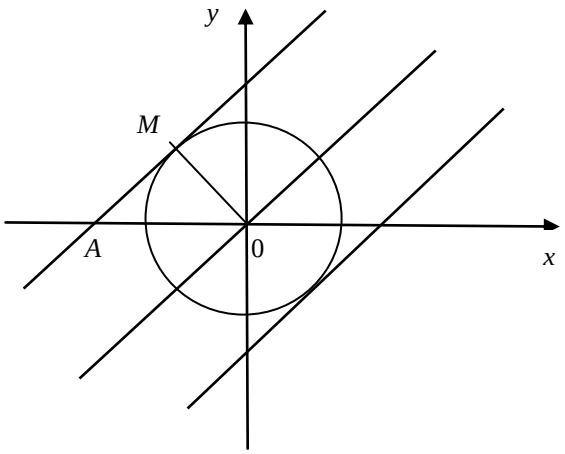
$$y = x+\sqrt{6a-14} \text{ и } y = x-\sqrt{6a-14},$$

решения второго уравнения – точки окружности с центром в начале координат с радиусом $\sqrt{6+3a}$.

Система имеет ровно два решения, если обе прямые касаются окружности, либо совпадают.

Рассмотрим первый случай. Треугольник OMA прямоугольный и равнобедренный, поэтому его катет (радиус окружности) равен произведению гипотенузы на $\sqrt{2}/2$:

$$\sqrt{6+3a} = \sqrt{(6a-14)/2},$$



$6+3a = 3a-7$, решений нет.

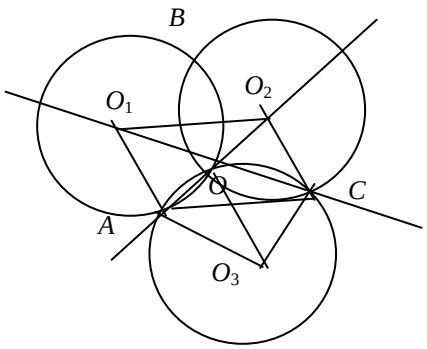
Рассмотрим второй случай. Прямые совпадают, если $a = 7/3$. Найдём точки пересечения прямой с $y = x$ окружностью: $2x^2 = 3(2+7/3) = 13$, $x = \pm\sqrt{13/2}$.

Ответ: $a = 7/3$.

Задача 5

Три равные окружности пересекаются в одной точке. Построены три прямые, каждая из которых проходит через вторую точку пересечения двух из окружностей и центр третьей. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим пересечение любых двух из указанных прямых, например - O_1C и O_2A. Из равенства окружностей вытекает, что CO_2OO_3 - ромб, поэтому $O_2C \parallel OO_3$, AO_1OO_3 - ромб, поэтому $O_1A \parallel OO_3$. Таким образом, четырехугольник O_1ACO_2 - параллелограмм, его диагонали O_1C и O_2A делятся точкой пересечения пополам. Отсюда и вытекает доказываемое утверждение.


B
O_1
O_2
O
C
A
O_3