



Институт Физики  
Микроструктур РАН



Центр криогенной наноэлектроники  
Нижегородский государственный  
технический университет им. Р.Е. Алексеева

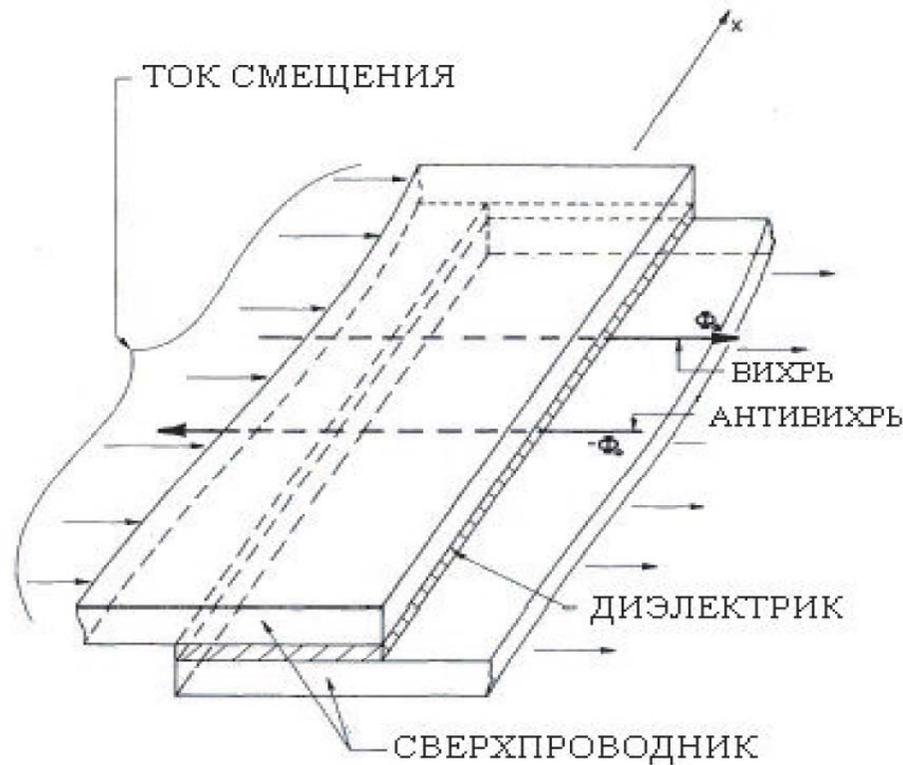


**НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**  
Национальный исследовательский университет

# Случайные процессы в нелинейных системах

**Панкратов А.Л.**

# Джозефсоновские контакты

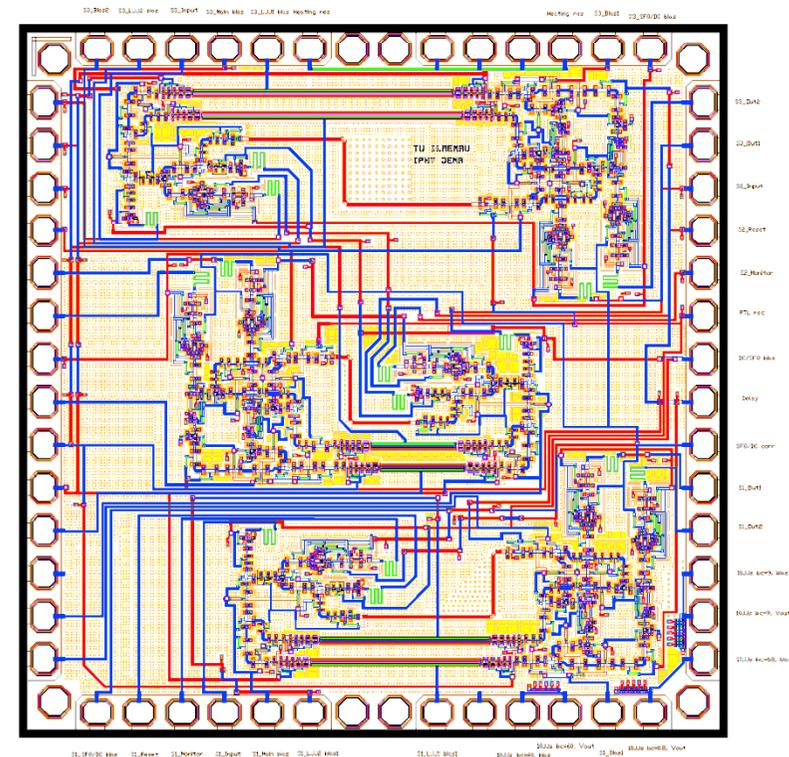
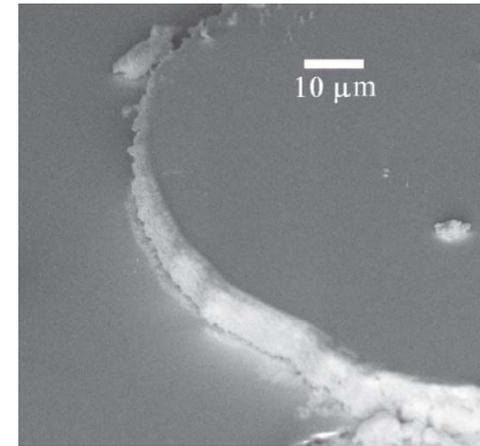
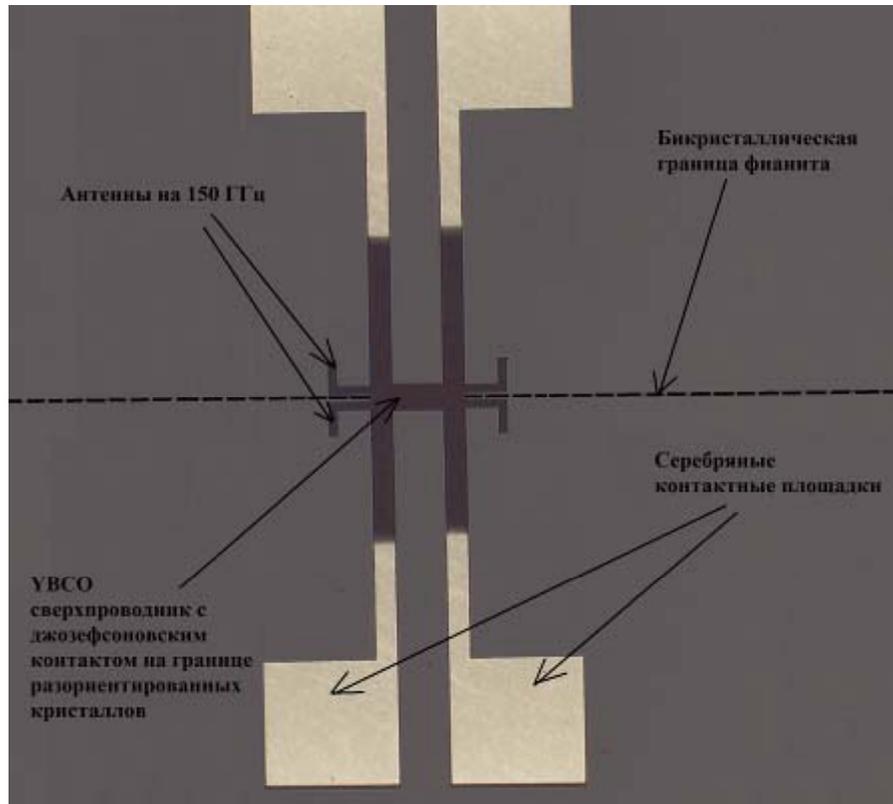


$$I_s = I_c \sin(\varphi)$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \eta(x) - \sin(\varphi)$$

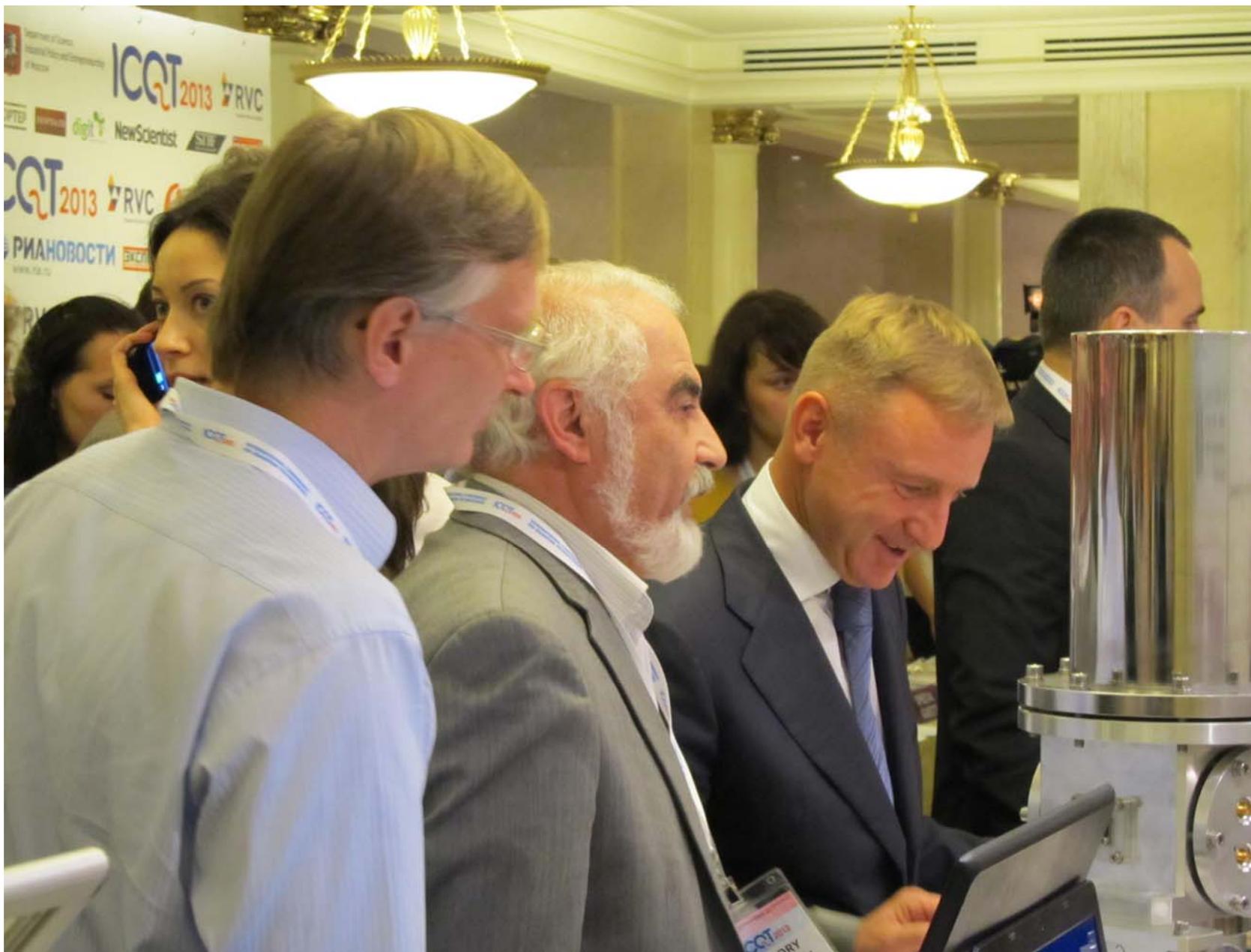
# Джозефсоновские контакты



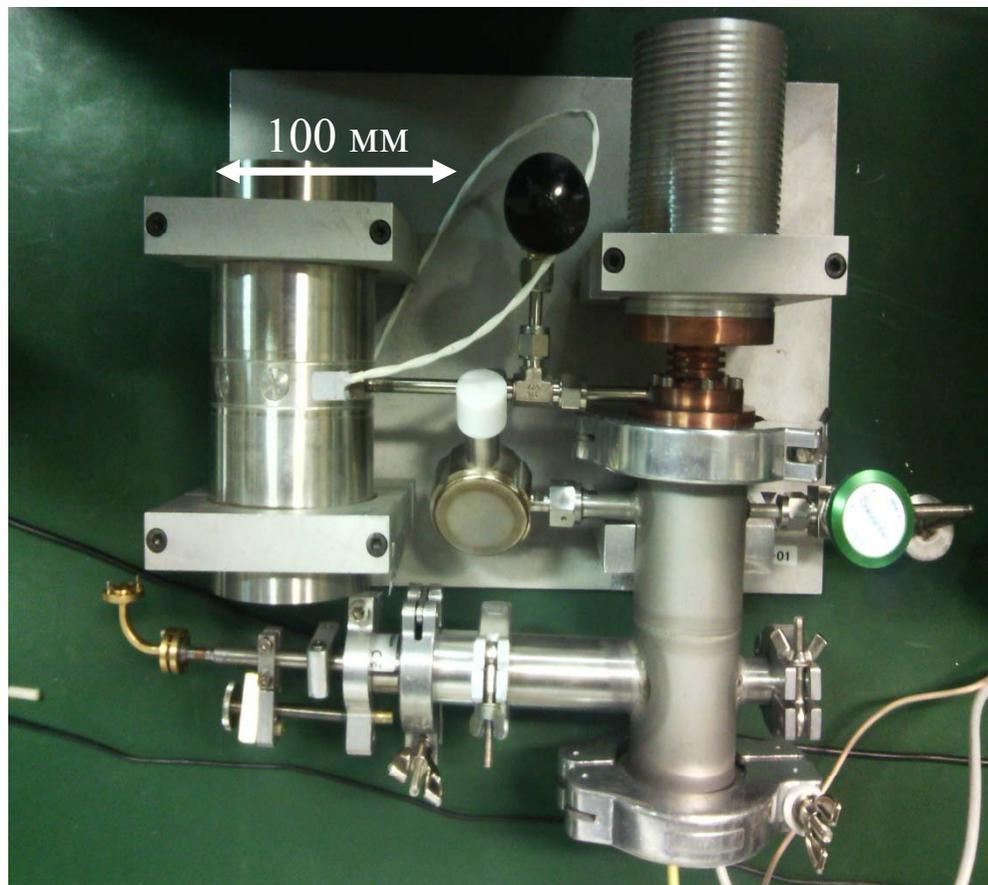
# Криостаты ЦКН НГТУ



# Компактные криостаты



# Сверхкомпактные криостаты



# Иерархия шумов

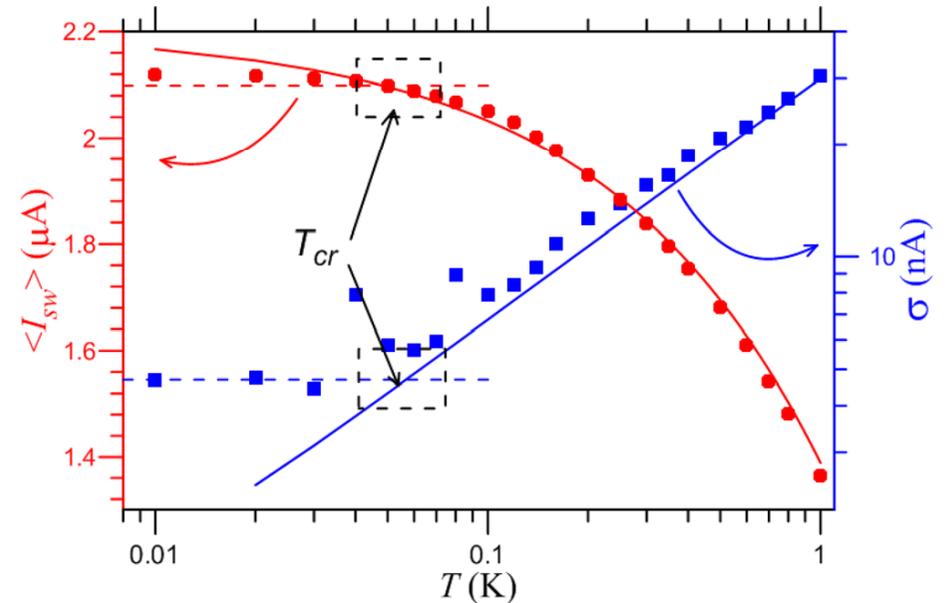
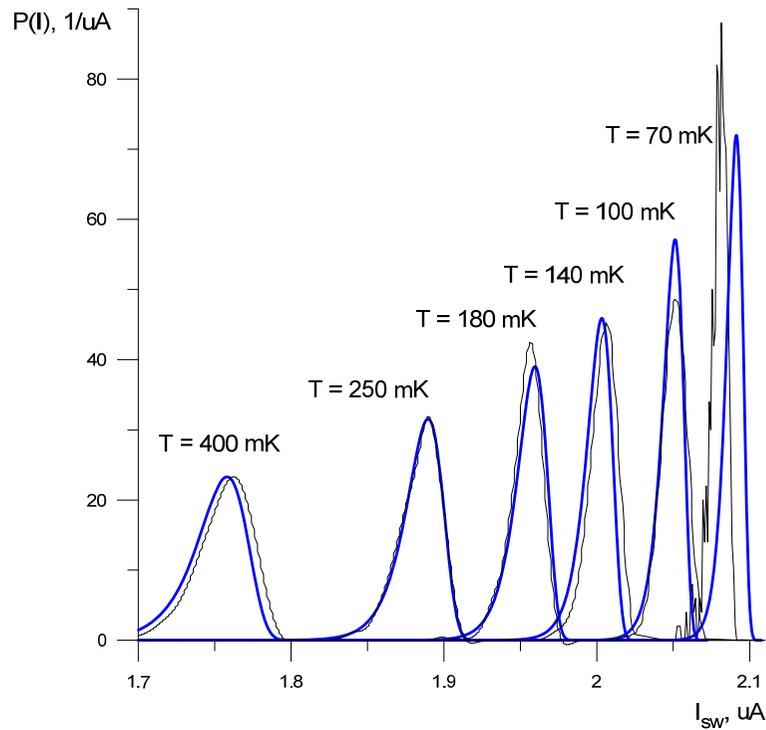
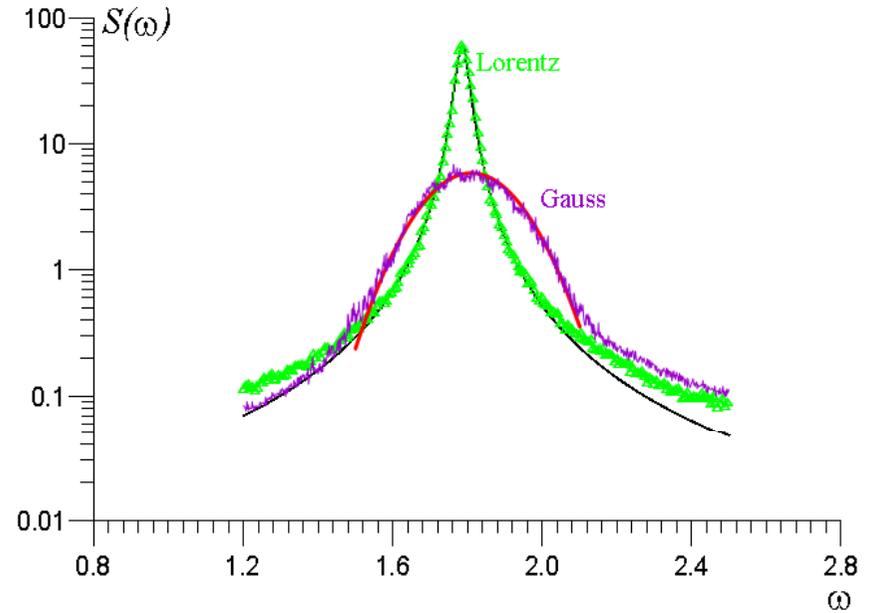
Технические шумы (узкополосные)

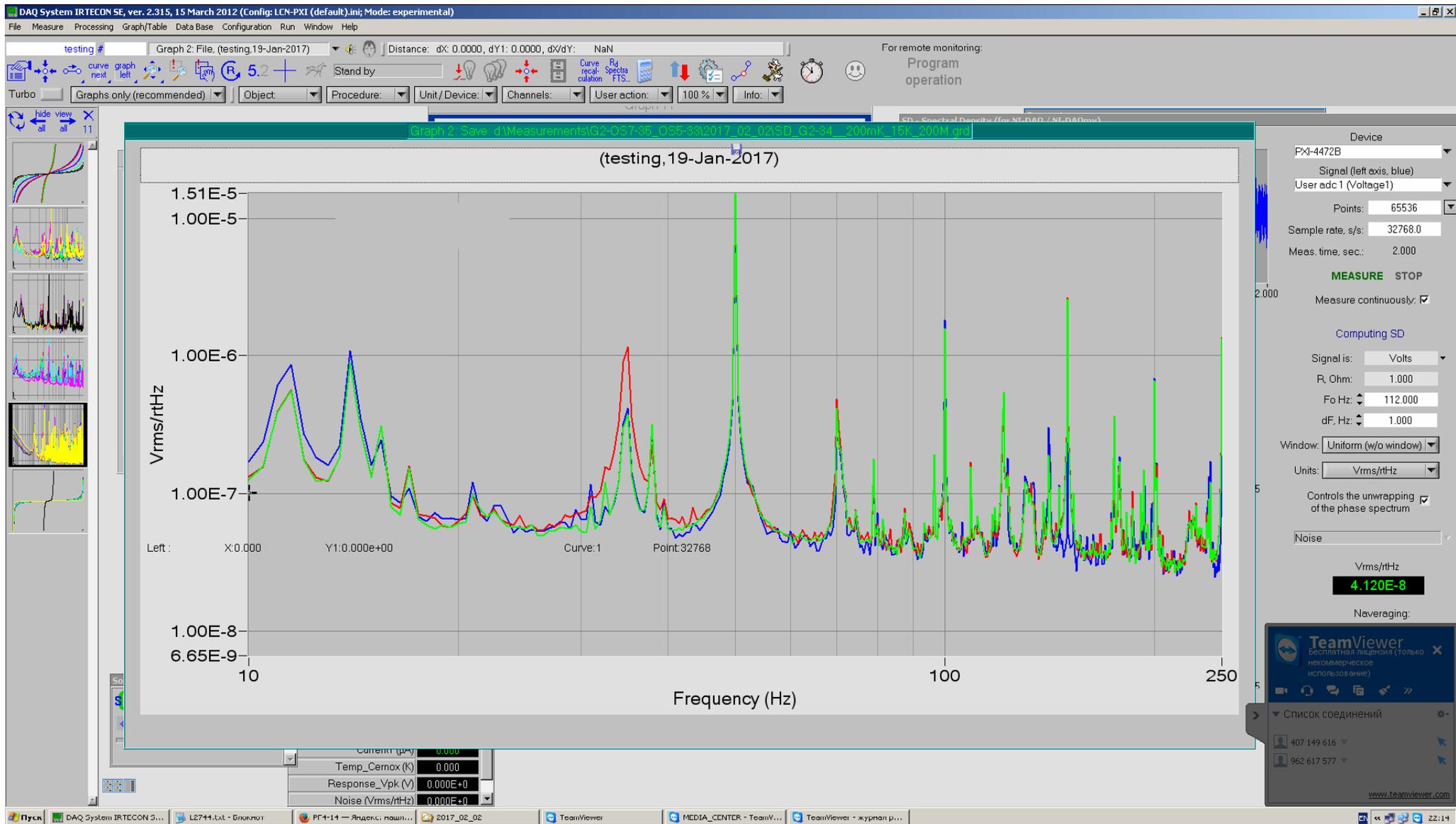
Естественные шумы (широкополосные):

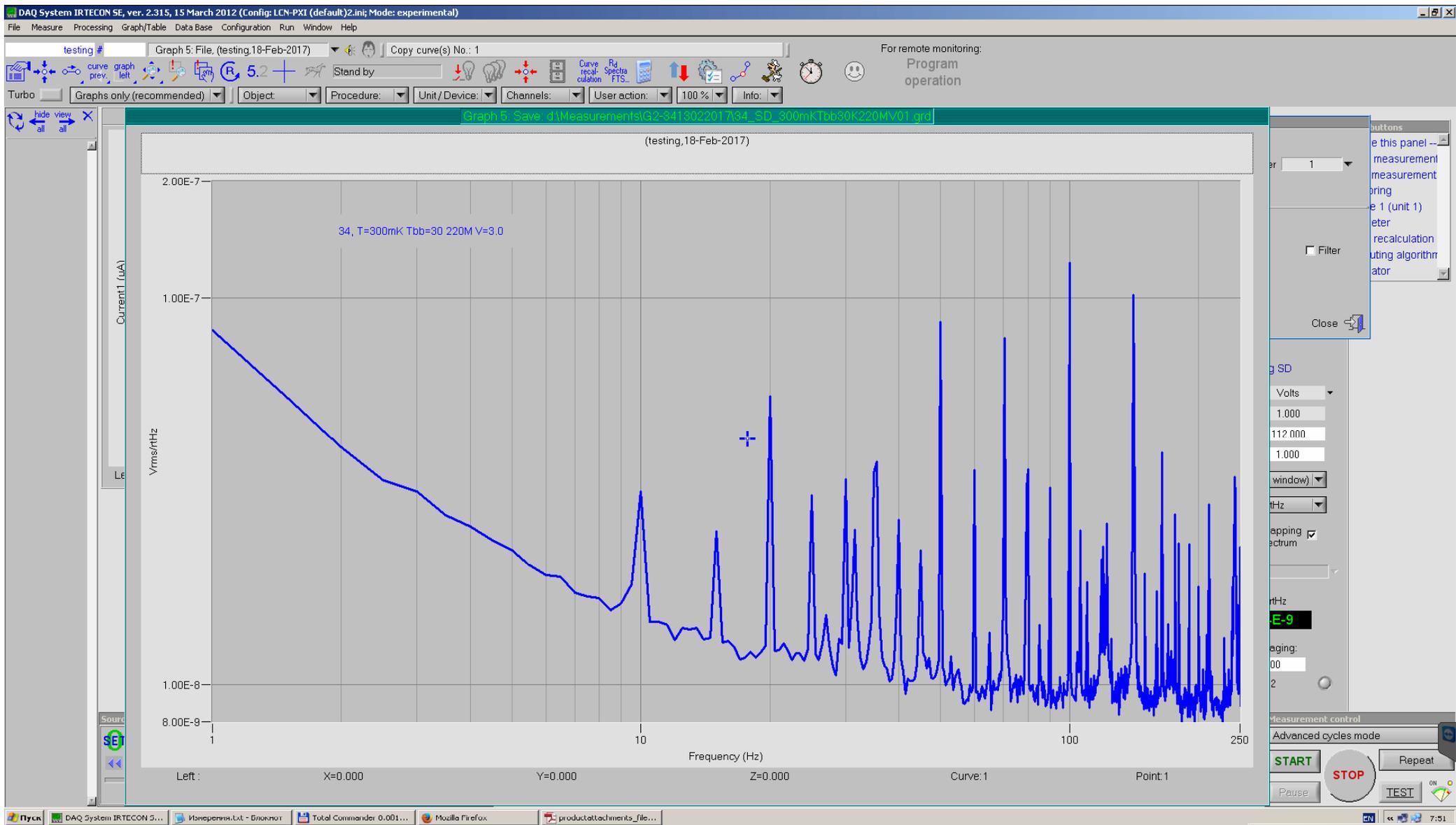
Тепловой шум  $S_I(\omega) \sim kT/R$

Дробовой шум  $S_I(\omega) \sim eI/2$

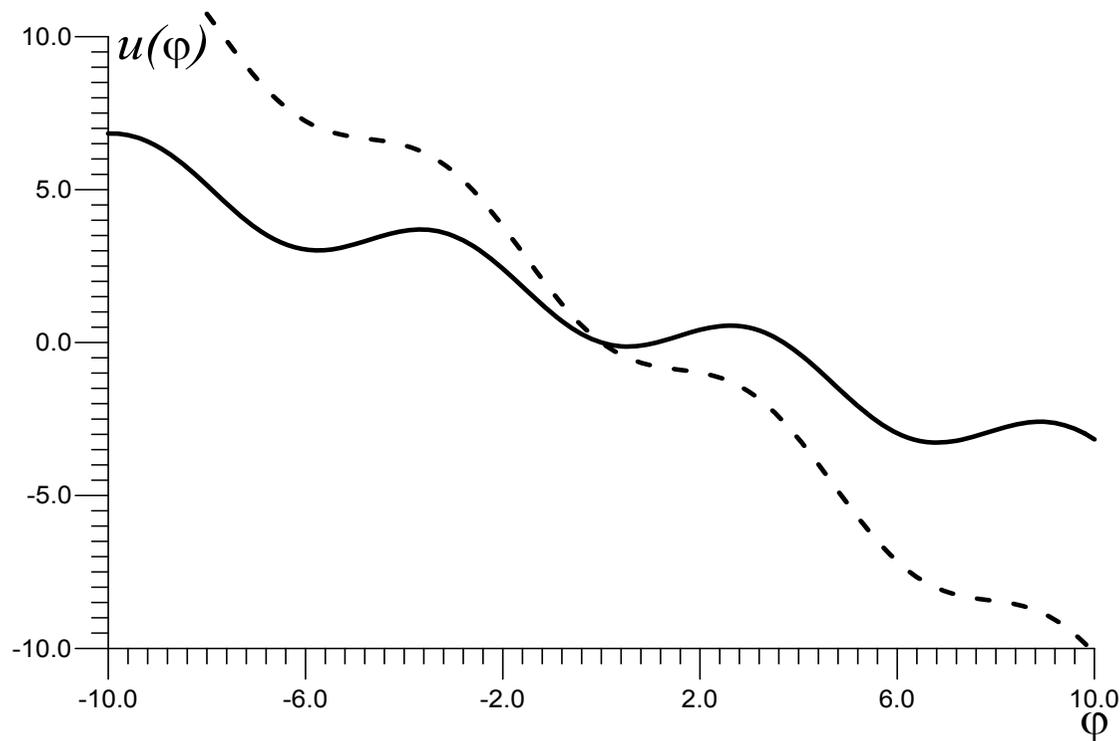
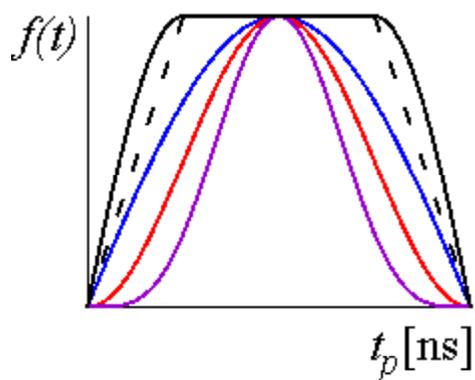
Квантовый шум  $S_I(\omega) \sim h\omega/R$



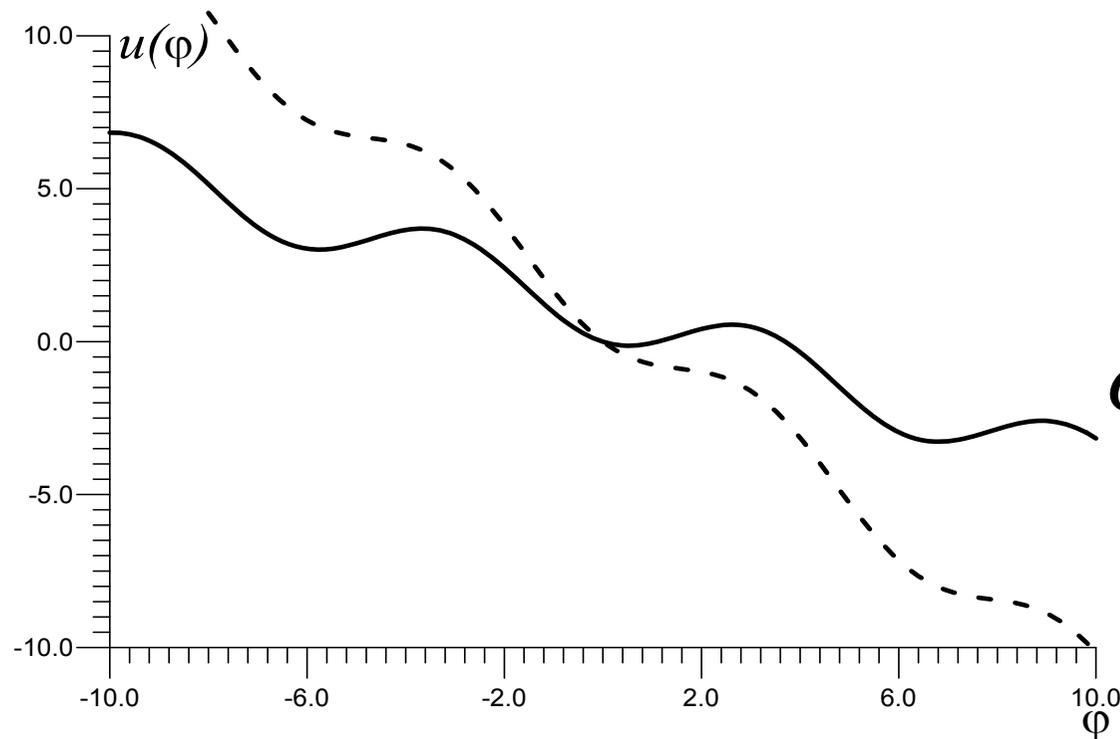




# Что мы понимаем под переключением?



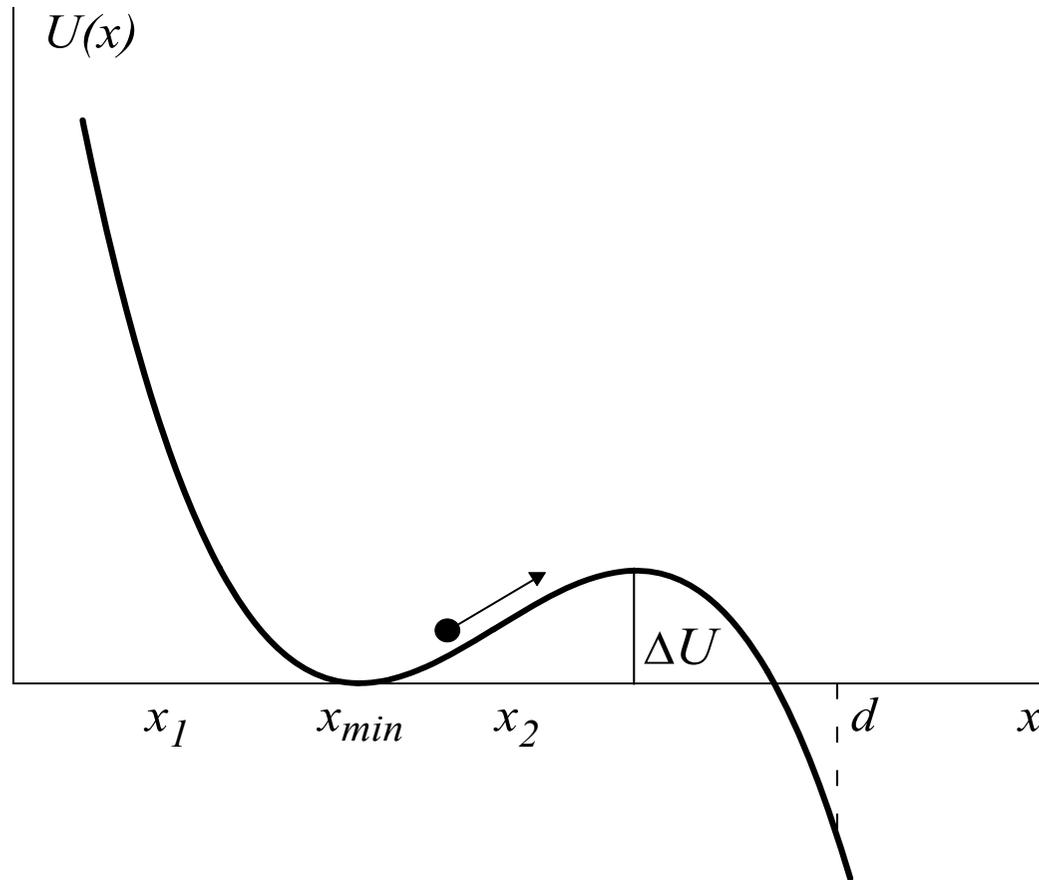
# Что мы понимаем под минимизацией шумов?



$$\sigma \sim e^{\Delta U / kT}$$

$$\sigma \sim \sqrt{kT}$$

# Проблема Крамерса



$$U(x) = ax^2 - bx^3$$

# Уравнения Ланжевена и Фоккера-Планка

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dU(x)}{dx} + \xi(t)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D \delta(\tau), \quad D = 2kT/h$$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{du(x)}{dx} W(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) \right]$$

$$B = 1/D, \quad u(x) = U(x)/kT, \quad W(c, t) = 0, \quad G(d, t) = 0.$$

- Безразмерное уравнение ФП

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{du(x)}{dx} W(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) \right]$$

- Замена функции:

$$W(x, t) = \Psi(x, t) e^{-\frac{u(x)}{2}}$$

- Замена времени:

$$t = i\tau$$

- Безразмерное уравнение Шредингера

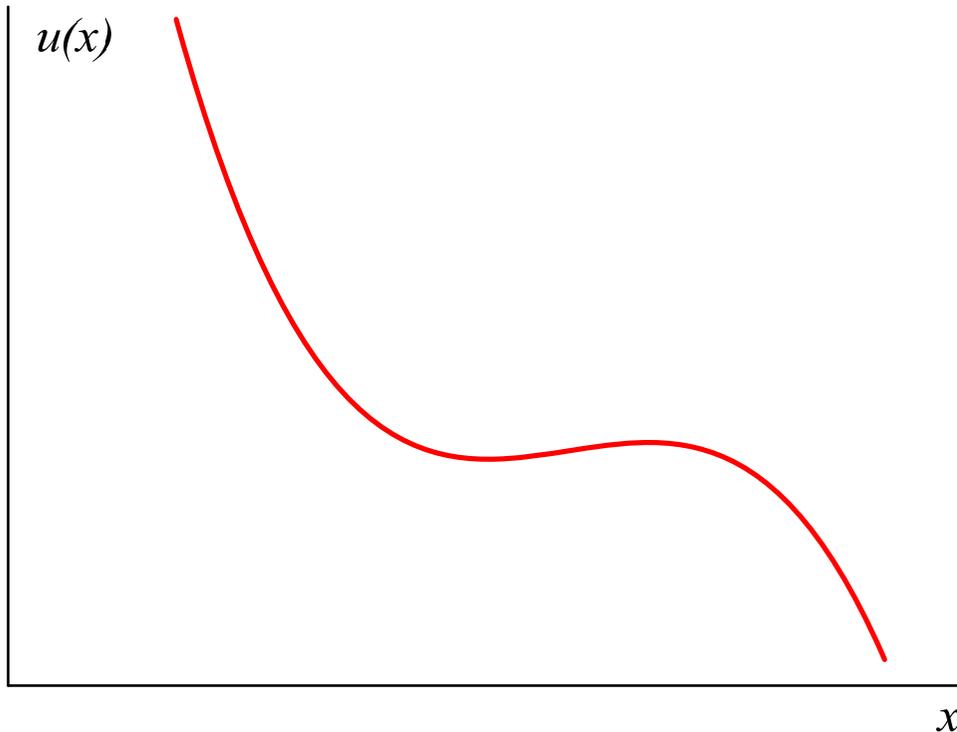
$$\frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} = iD \left[ \frac{\partial^2 \psi(x, \tau)}{\partial x^2} - V(x) \psi(x, \tau) \right]$$

- Связь потенциалов в уравнении ФП и Шредингера

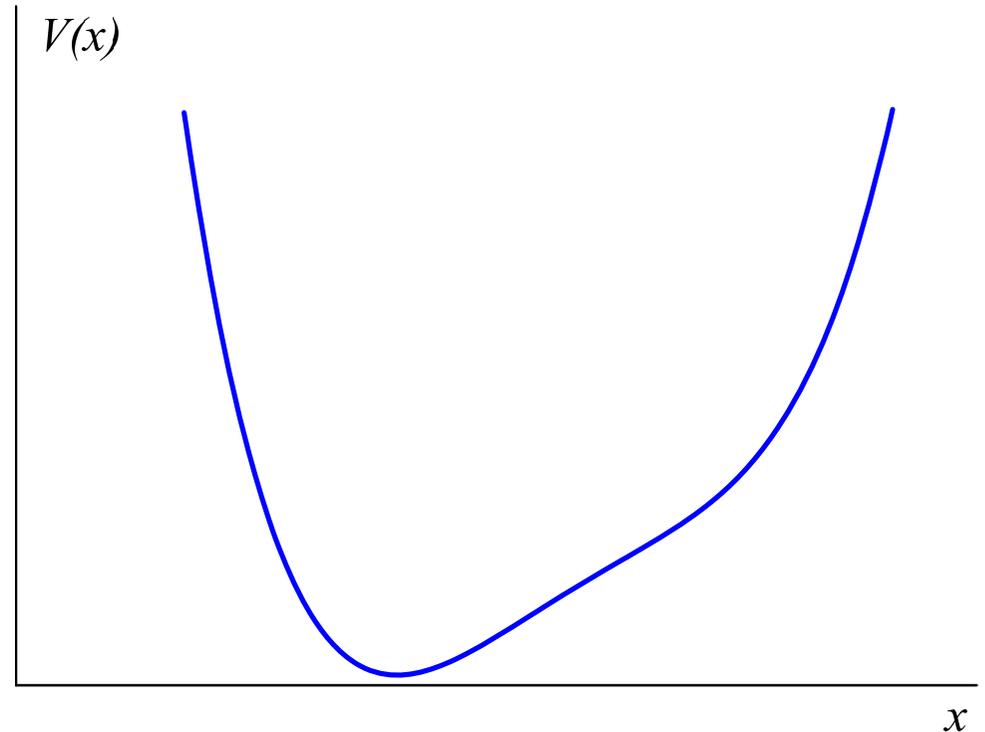
$$V(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} \frac{du(x)}{dx} \right)^2$$

M. Bernstein and L.S. Brown, Supersymmetry and the Bistable Fokker-Planck Equation, Phys. Rev. Lett., **52**, 1933 (1984).

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{du(x)}{dx} W(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} W(x,t) \right] \quad \frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial \tau} = iD \left[ \frac{\partial^2 \psi(x,\tau)}{\partial x^2} - V(x)\psi(x,\tau) \right]$$



$$u(x) = x^2 - x^3$$



$$V(x) = (3x^2/2 - x)^2 + 3x - 1$$

# Временные характеристики

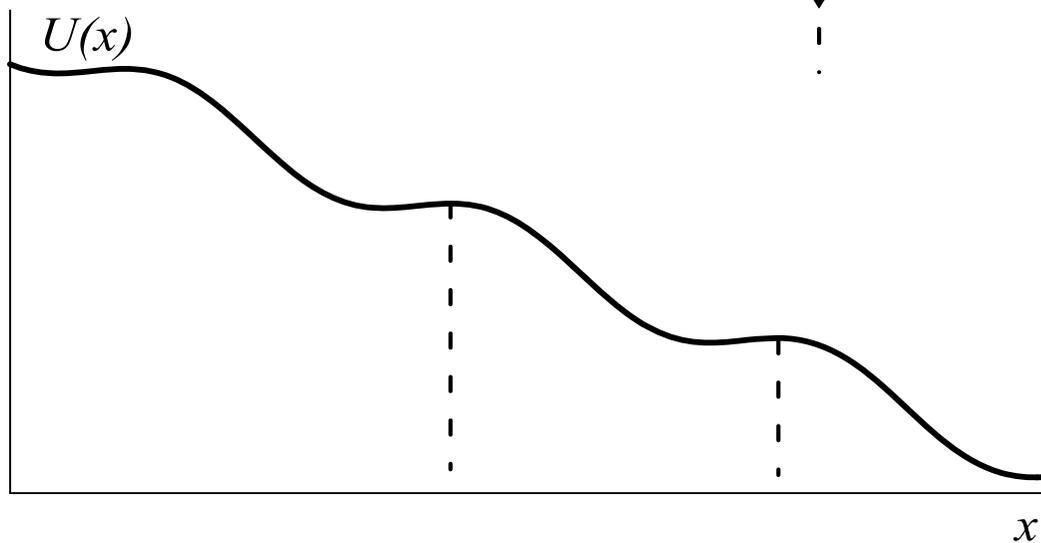
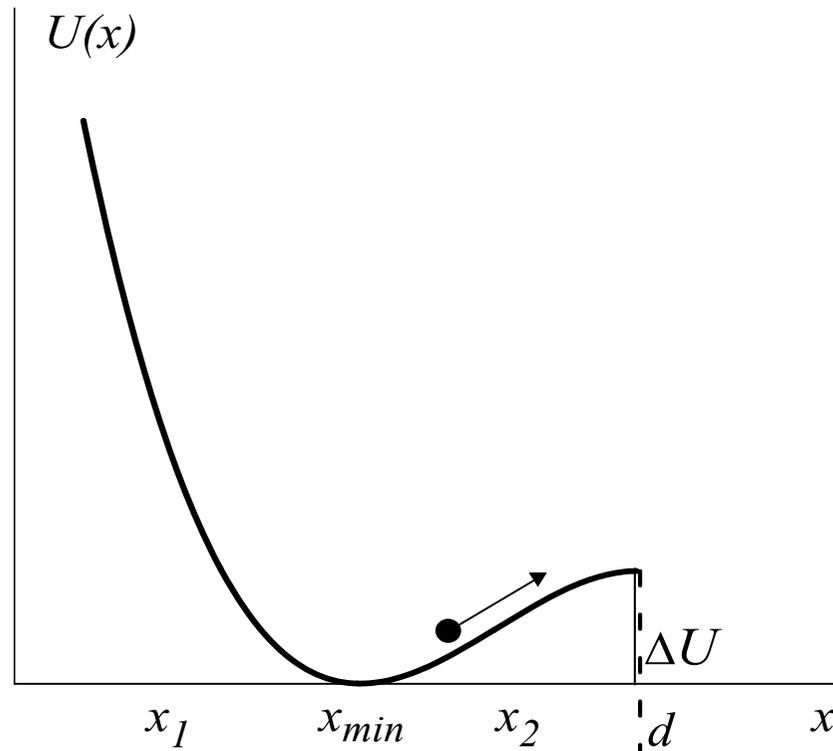
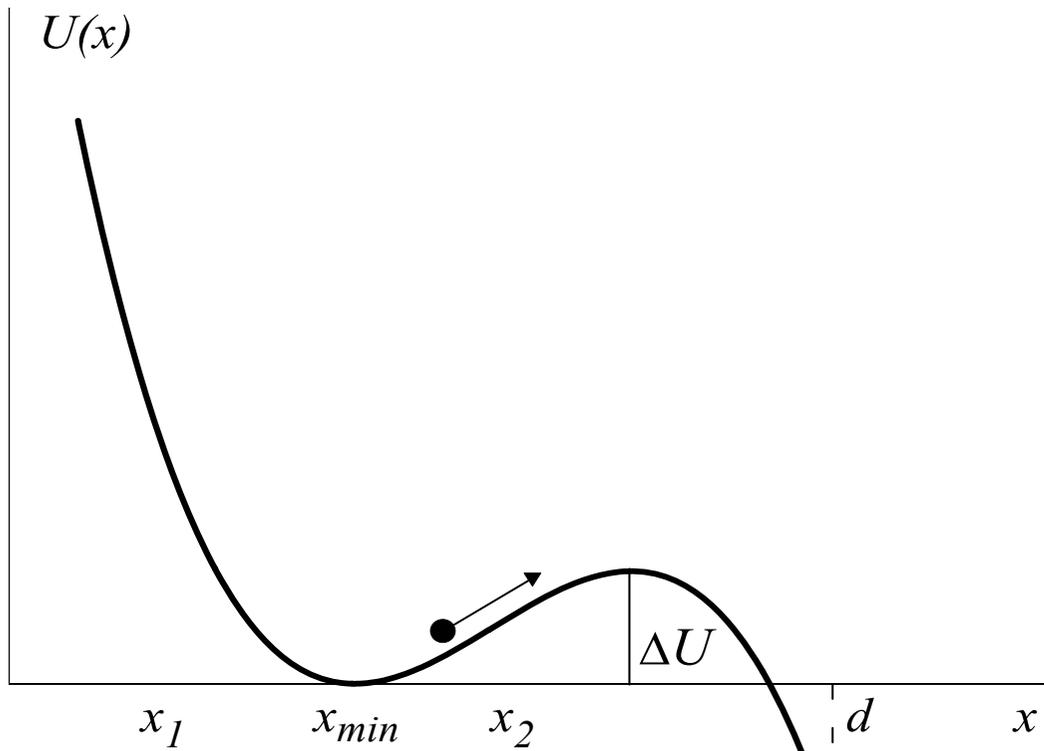
1. Моменты времени первого достижения границ (Понтрягин, Андронов, Витт, ЖЭТФ, 1933 г.)
2. Метод Крамерса:  $\theta \sim \exp(\Delta U/kT)$ , Physica, 1940 г.
3. Эффективное собственное число (Рискен, Юнг, Гаранин)
4. Обобщенное моментное разложение (Надлер, Шультен)
5. Интегральное время релаксации и цепные дроби (Коффей, Калмыков, Титов)

$$\theta = \frac{\int_0^{\infty} [P(t) - P(\infty)] dt}{P(0) - P(\infty)}$$

$$\langle t^n \rangle = \int_0^{\infty} t^n w(t) dt$$

$$P(t) = \int_c^d W(x, t) dx$$

вероятность нахождения  
в области  $(c, d)$



$x$

## Метод преобразования Лапласа

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{du(x)}{dx} Y(x, s) \right] - sBY(x, s) = -B\delta(x - x_0)$$

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} W(x, t) e^{-st} dt \qquad G(x, s) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-st} dt$$

$$\theta = \frac{\int_0^{\infty} [P(t) - P(\infty)] dt}{P(0) - P(\infty)} \qquad \theta = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\hat{P}(s) - P(\infty)}{s[P(0) - P(\infty)]}$$

$$s\hat{P}(s) - P(\infty) = G(c, s) - G(d, s)$$

$$H(x, s) = sG(x, s) = H_0(x) + sH_1(x) + s^2H_2(x) + \dots$$

$$\tau_1(c, x_0, d) = -(H_2(d) - H_2(c));$$

$$\tau_2(c, x_0, d) = 2(H_3(d) - H_3(c));$$

$$\tau_n(c, x_0, d) = (-1)^n n! (H_{n+1}(d) - H_{n+1}(c)).$$

$$\tau_1 = B \left\{ \int_{x_0}^d e^{u(x)} \int_c^x e^{-u(y)} dy dx + \int_c^d e^{-u(y)} dy \cdot \int_d^\infty e^{u(x)} dx \right\}$$

$$\tau_2 = 2\tau_1^2 + F, \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{1-i^2}} \exp(\Delta u), \quad \Delta u \gg 1$$

A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, *Physica C* **269**, 46-54 (1996).

A.N. Malakhov, *Chaos* **7**, 488 (1997).

A.L. Pankratov, *Physics Letters A* **234**, 329-335 (1997).

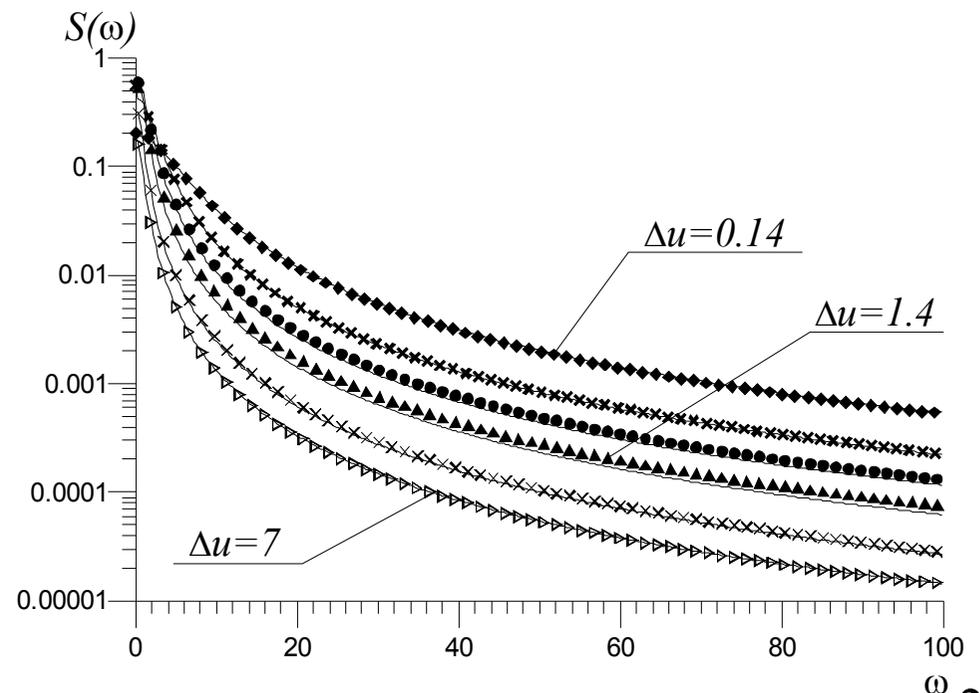
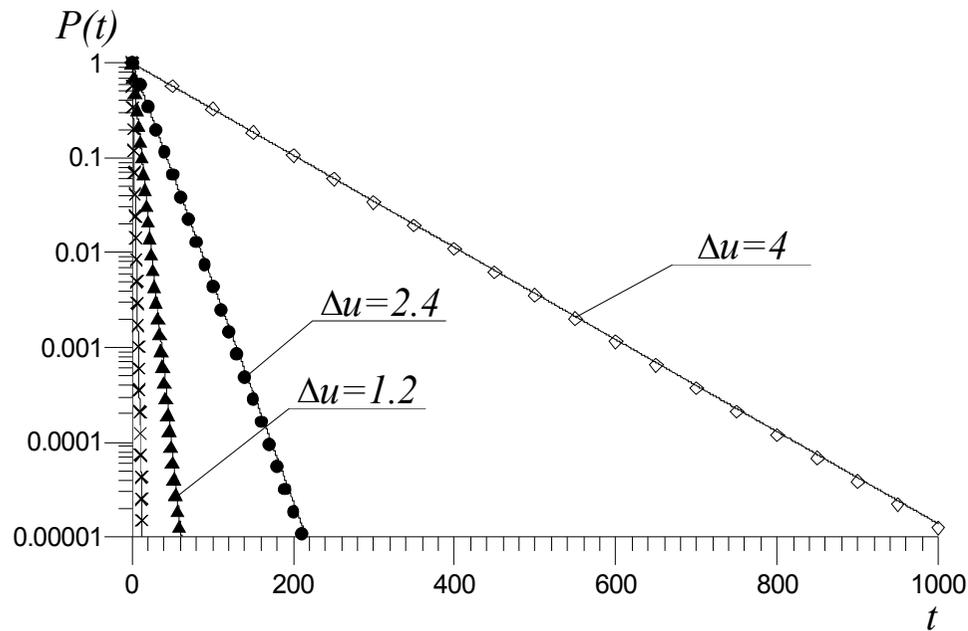
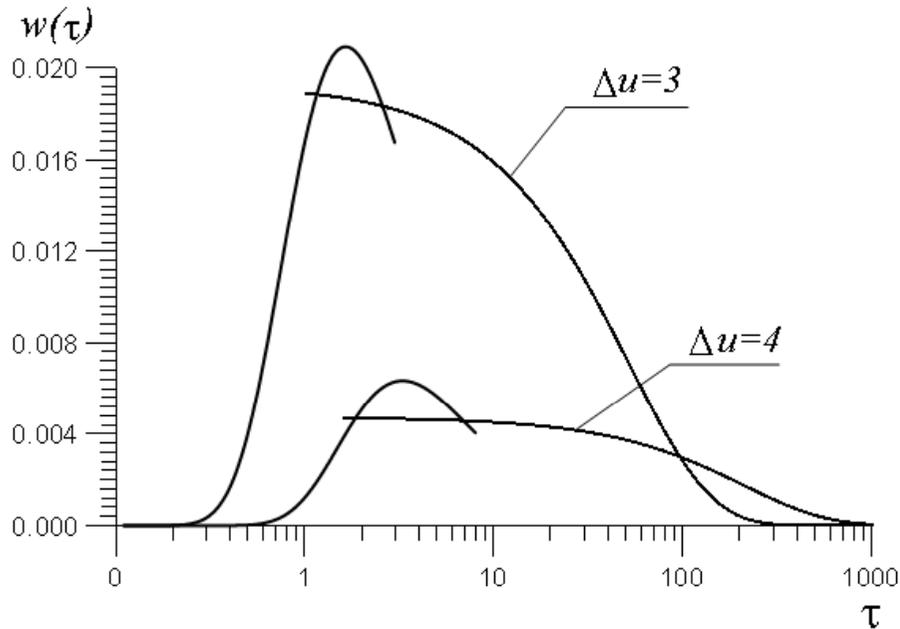
A.L. Pankratov, B. Spagnolo, *Physical Review Letters* **93**, 177001 (2004).

A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, *Adv. Chem. Phys.* **121**, 357-438 (2002).

# Временная эволюция средних

$$\tau_n \approx n! \tau_1^n$$

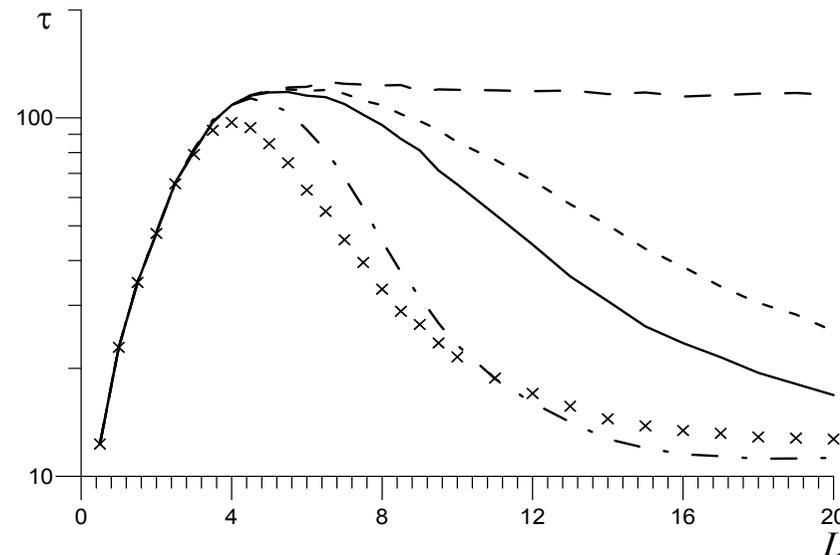
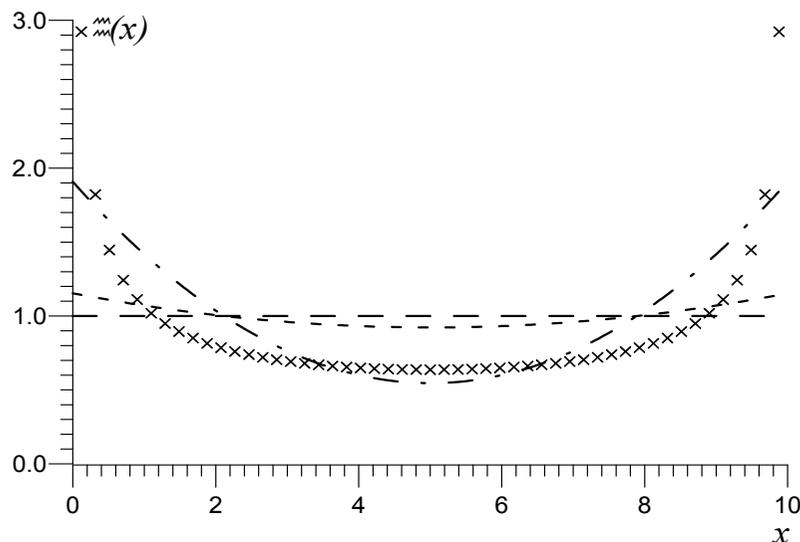
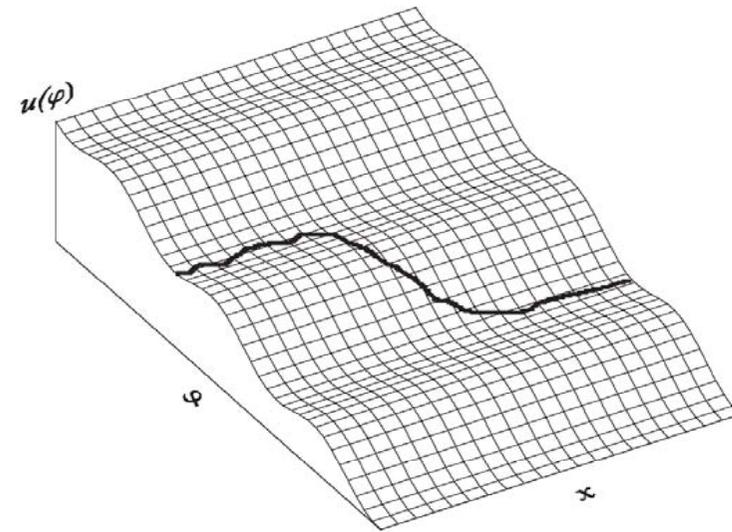
$$F(t) = F_0 \exp(-t / \tau)$$

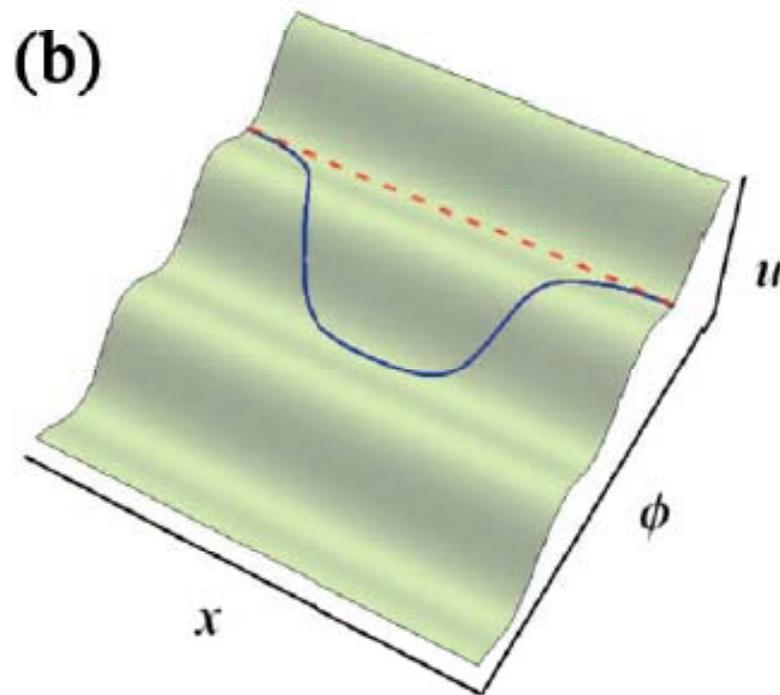
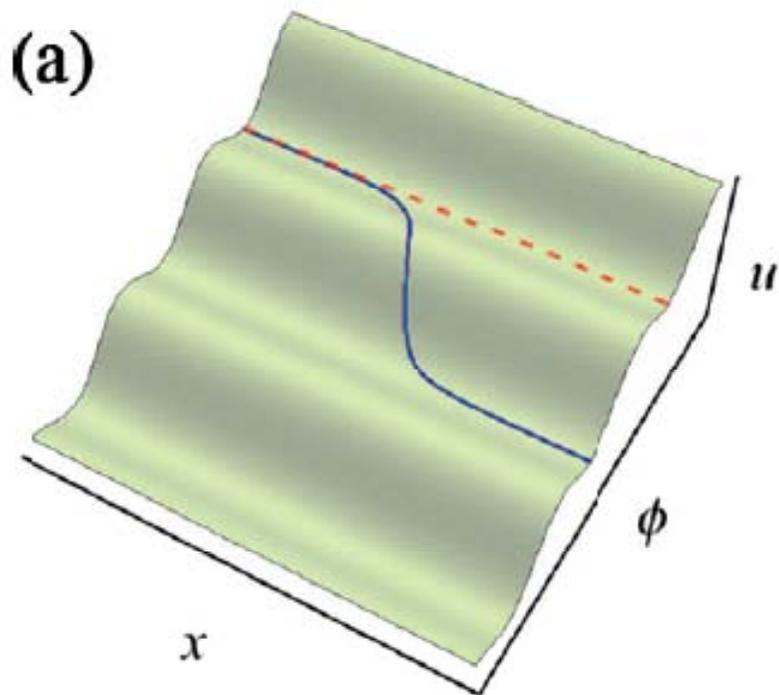


# Время жизни сверхпроводящего состояния

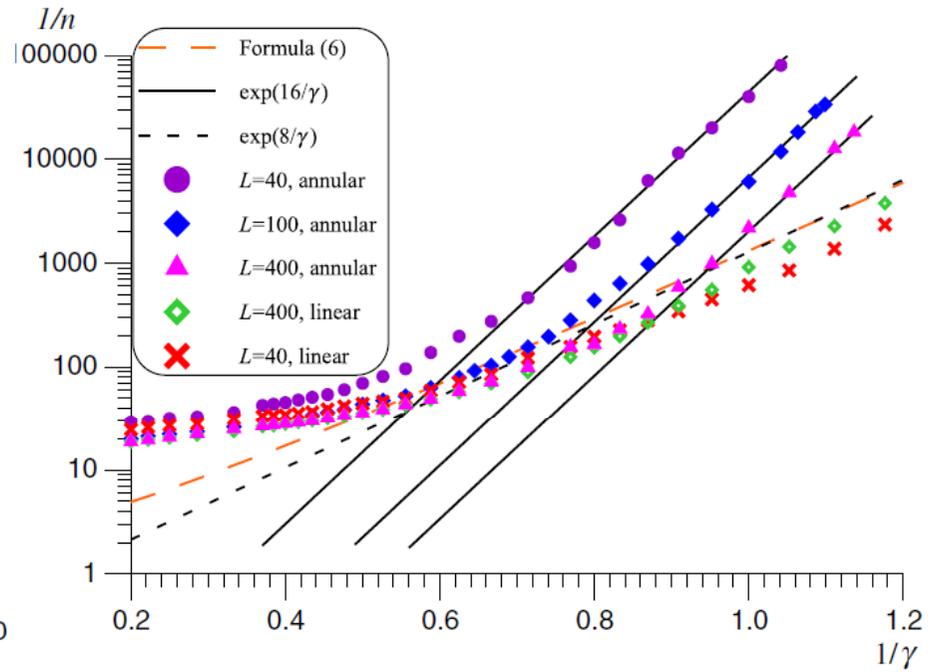
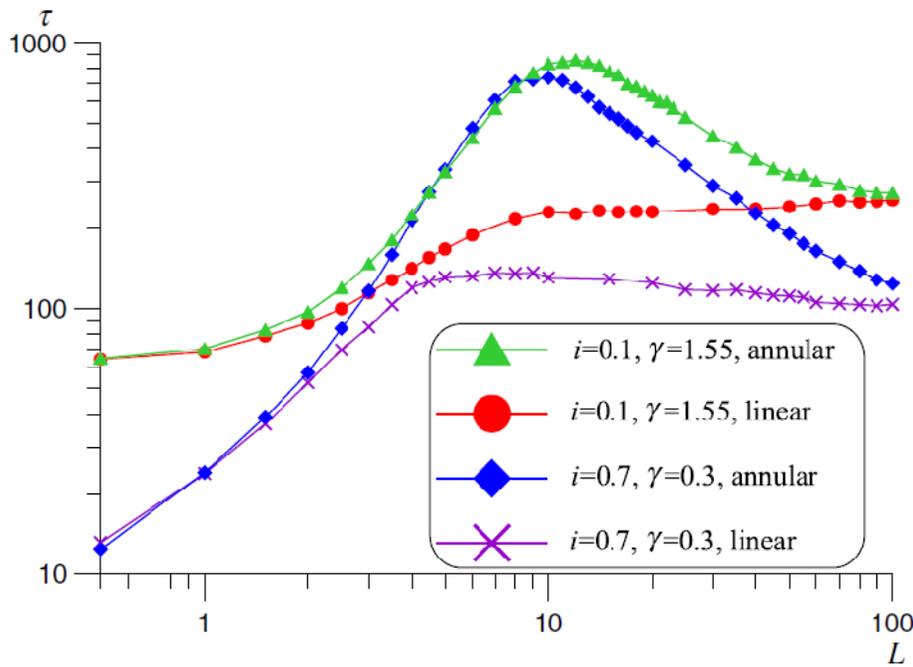
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \eta(x) - \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial \varphi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(L,t)}{\partial x} = H$$





K.G. Fedorov, and A.L. Pankratov, Phys. Rev. Lett., 103, 260601 (2009).

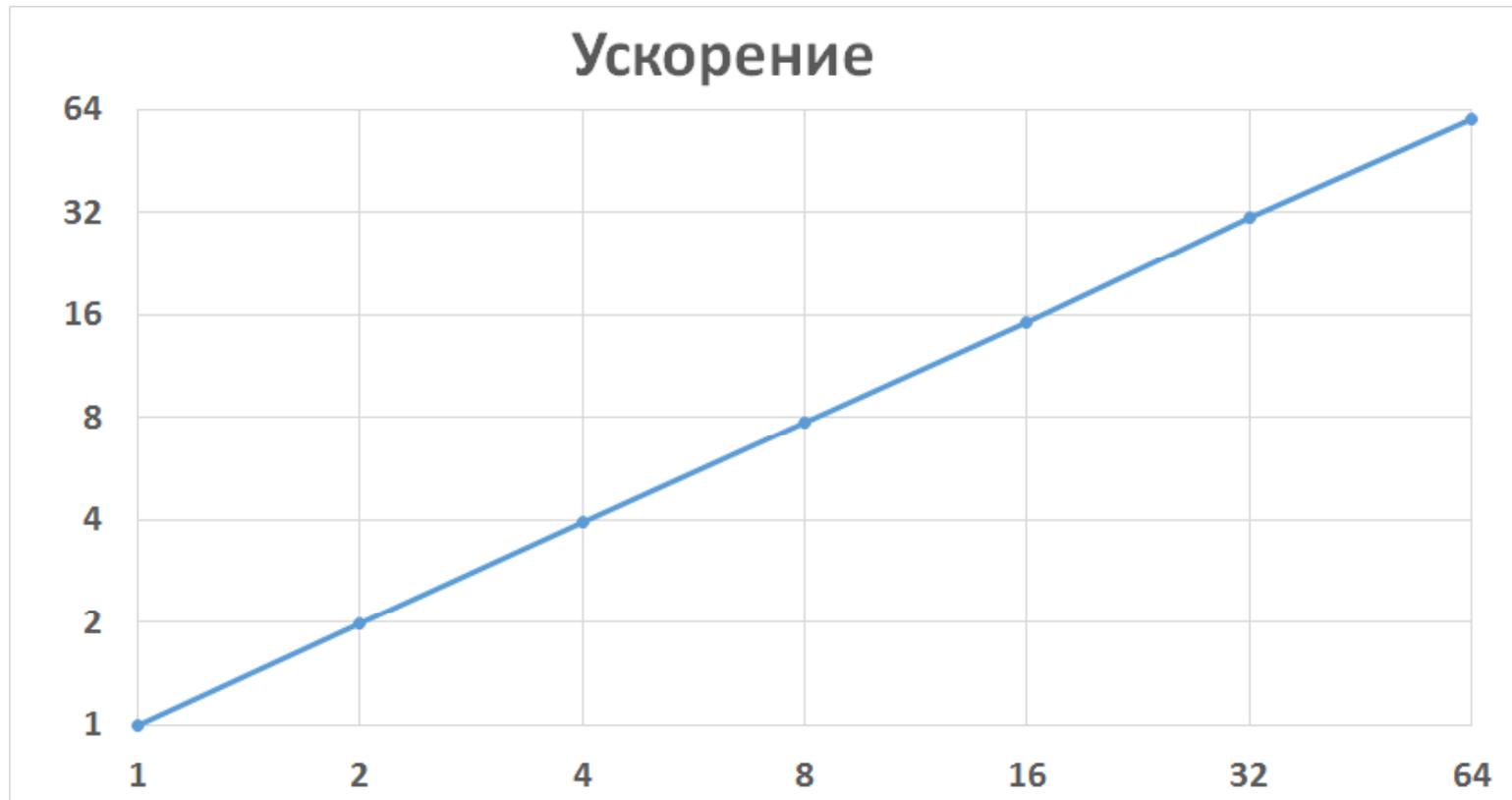


$$n = \sqrt{2E_k / \pi \gamma} \exp(-E_k / \gamma), \quad (6)$$

M. Buttiker, and R. Landauer, Phys. Rev. A, 23, 1397 (1981).

M. Buttiker, and T. Christen, Phys. Rev. Lett. 75, 1895 (1995).

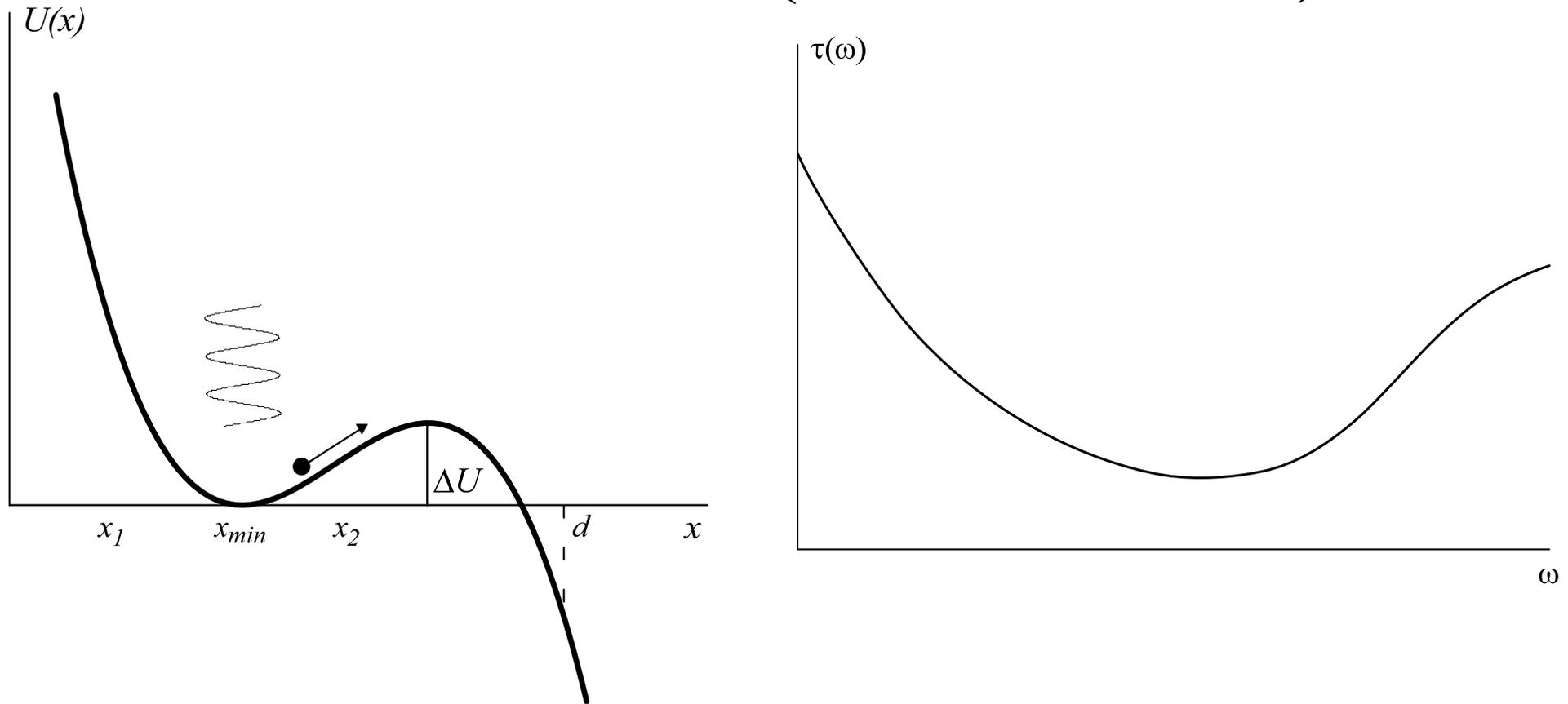
# Моделирование сложных систем, распараллеливание под кластеры



Ускорение на кластере «Лобачевский»  
в 64 раз на 64 узлах, в узле 8 ядер

# Резонансная активация

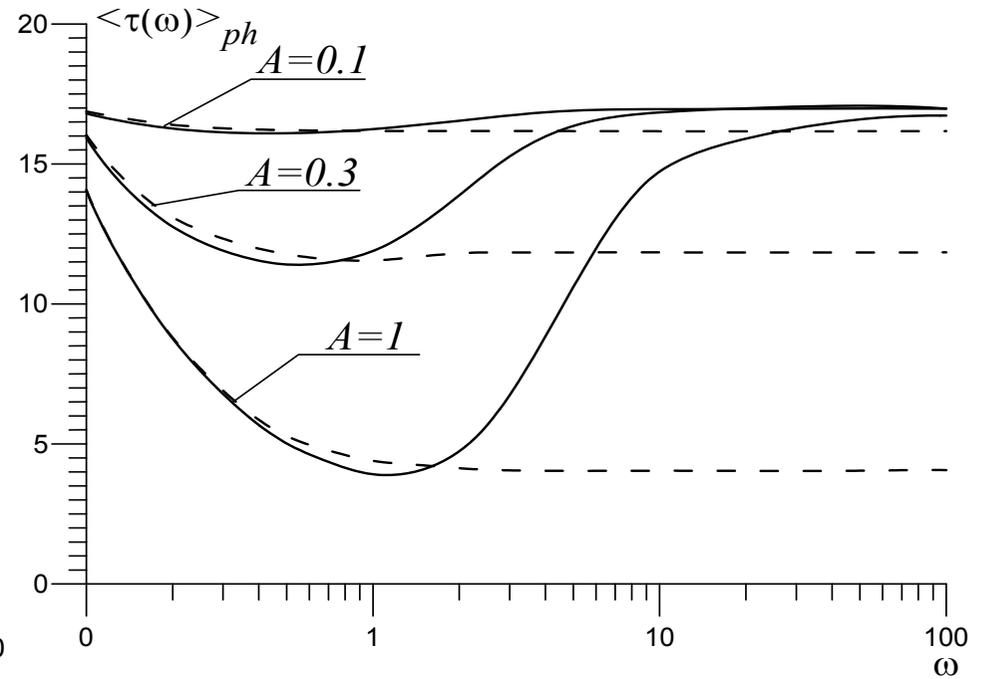
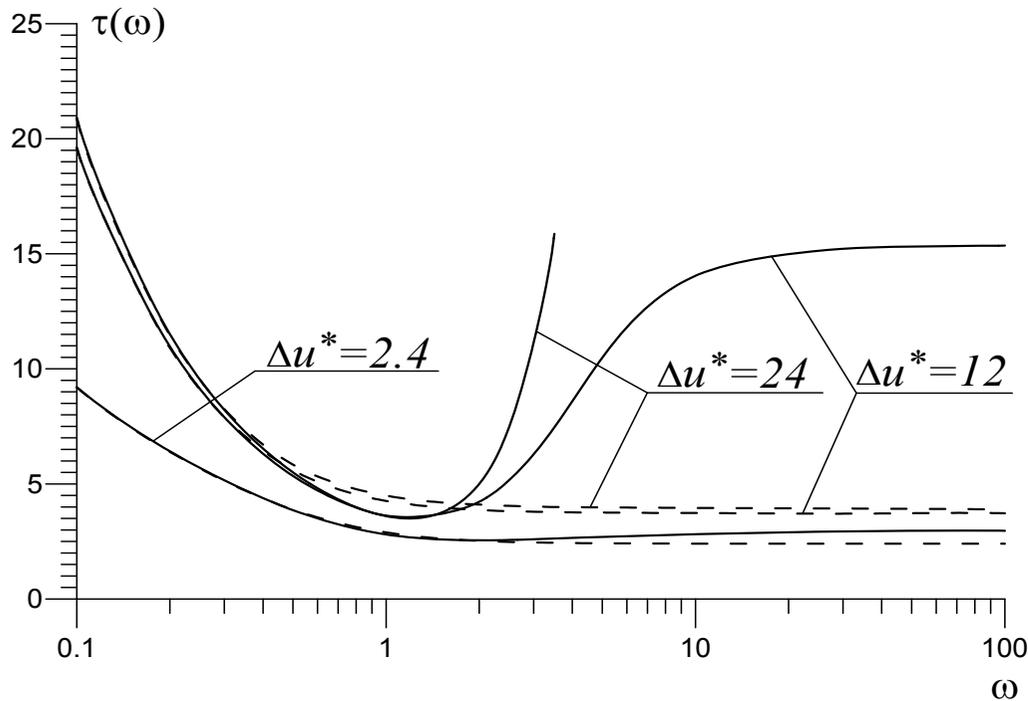
$$\frac{m}{h} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left( \frac{dU(x)}{dx} + A \sin(\omega t) \right) + \xi(t)$$



P. Jung, Physics Reports **234**, 175-295 (1993).

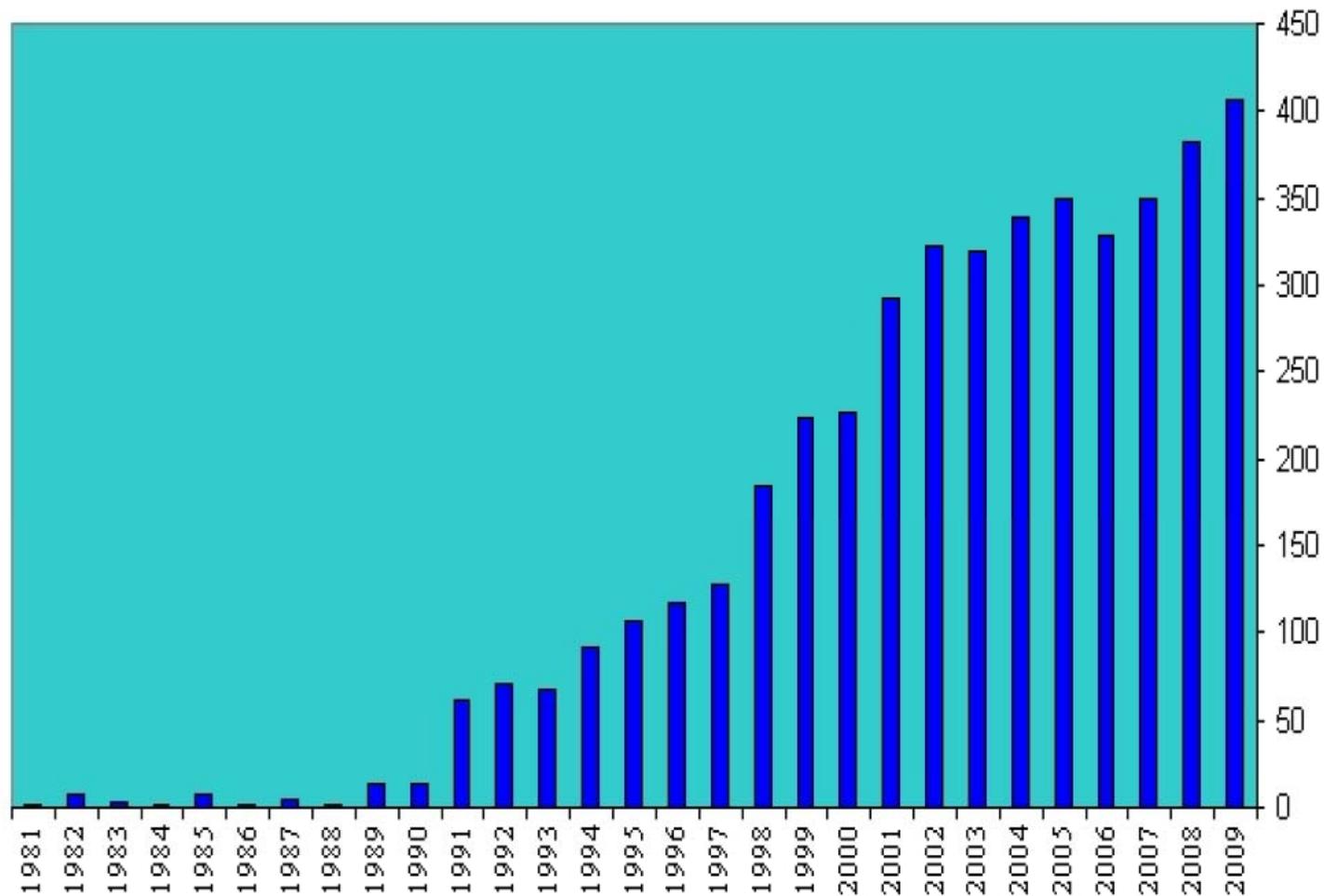
# Резонансная активация?

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left( \frac{dU(x)}{dx} + A \sin(\omega t) \right) + \xi(t)$$



A.L. Pankratov, M. Salerno, Physics Letters A **273**, 162-166 (2000).

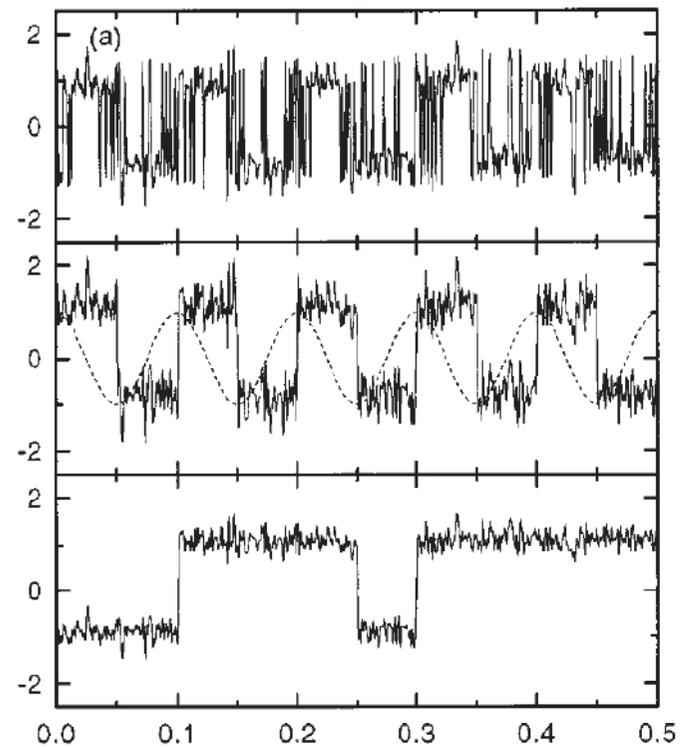
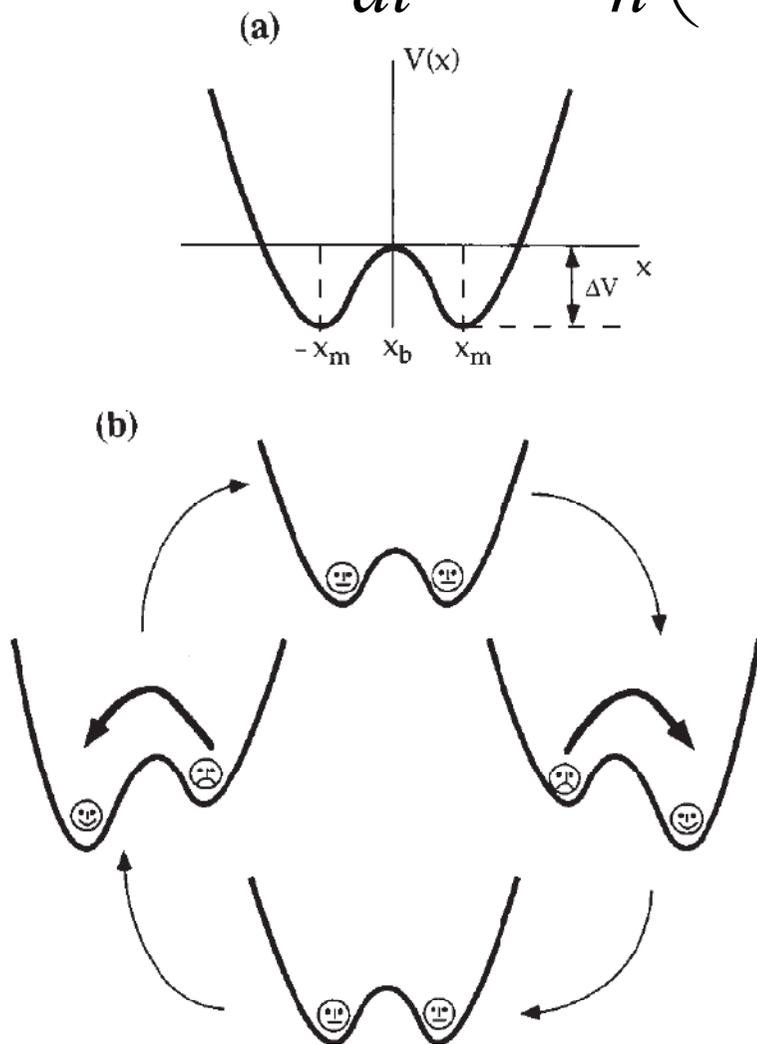
# Стохастический резонанс



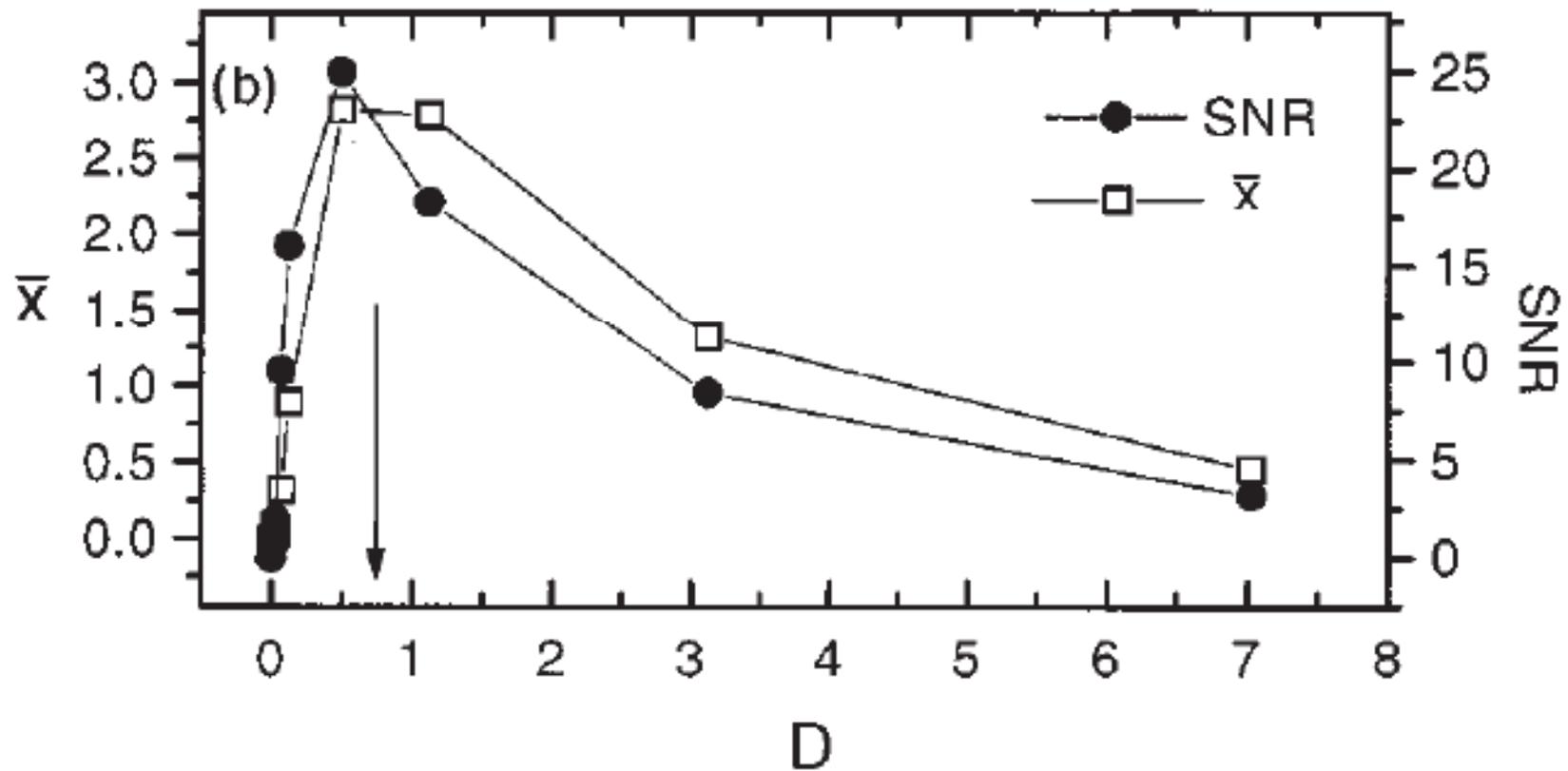
L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* 70, 223-287 (1998).  
В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *УФН*, 169, №1, 7 (1999).  
Th. Wellens, Y. Shatokhin and A. Buchleitner, *Rep. Progr. Phys.* 67, 45-105 (2004).

# Стохастический резонанс

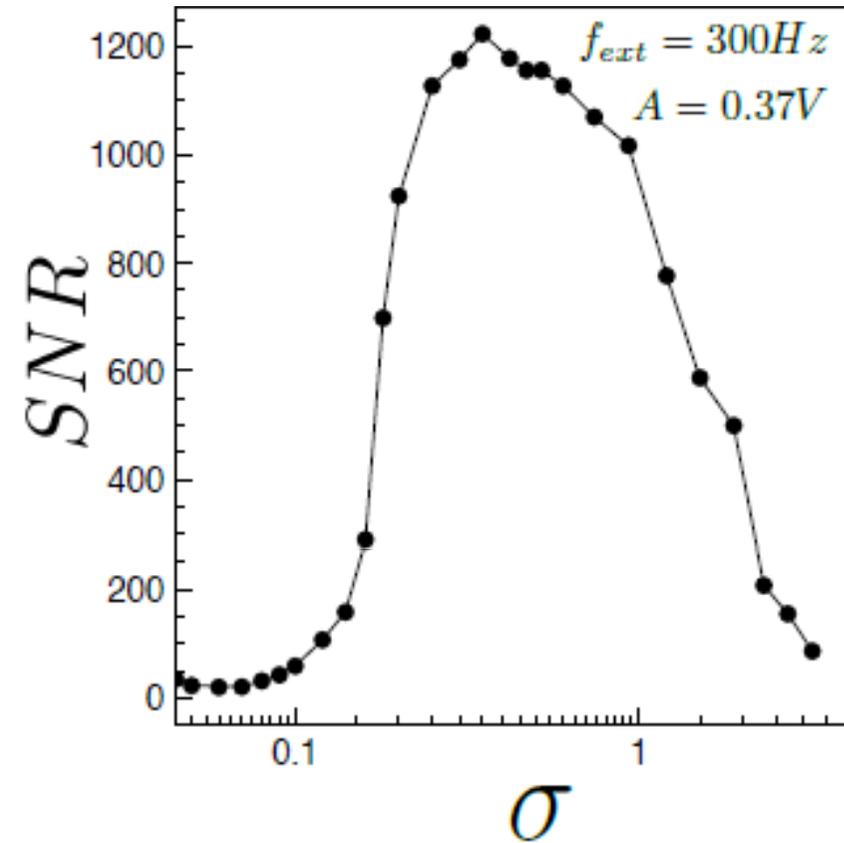
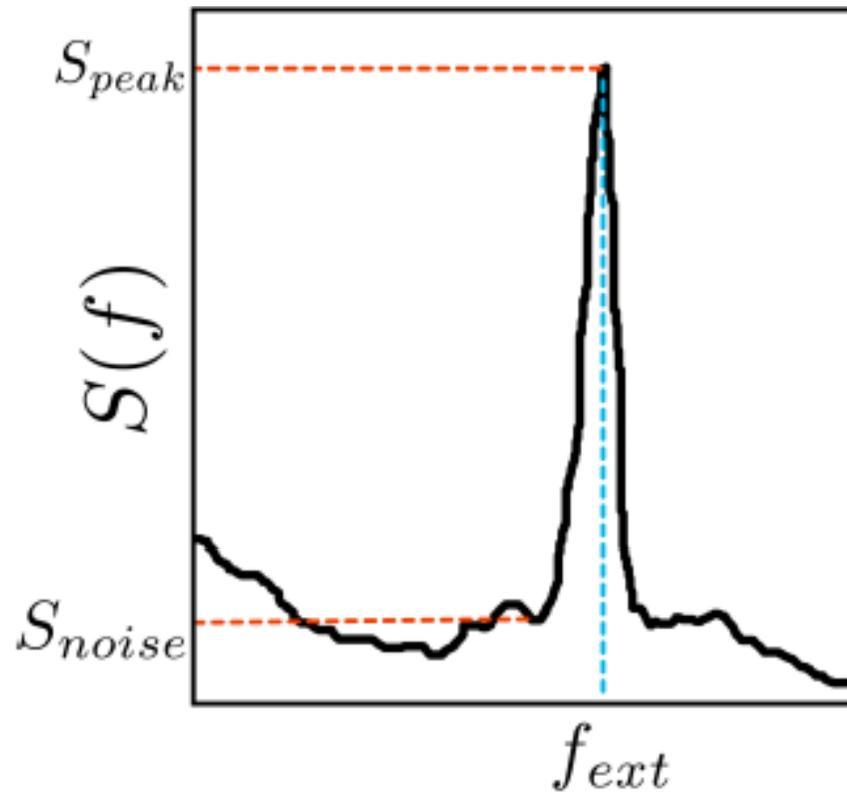
$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left( \frac{dU(x)}{dx} + A \sin(\omega t) \right) + \xi(t)$$

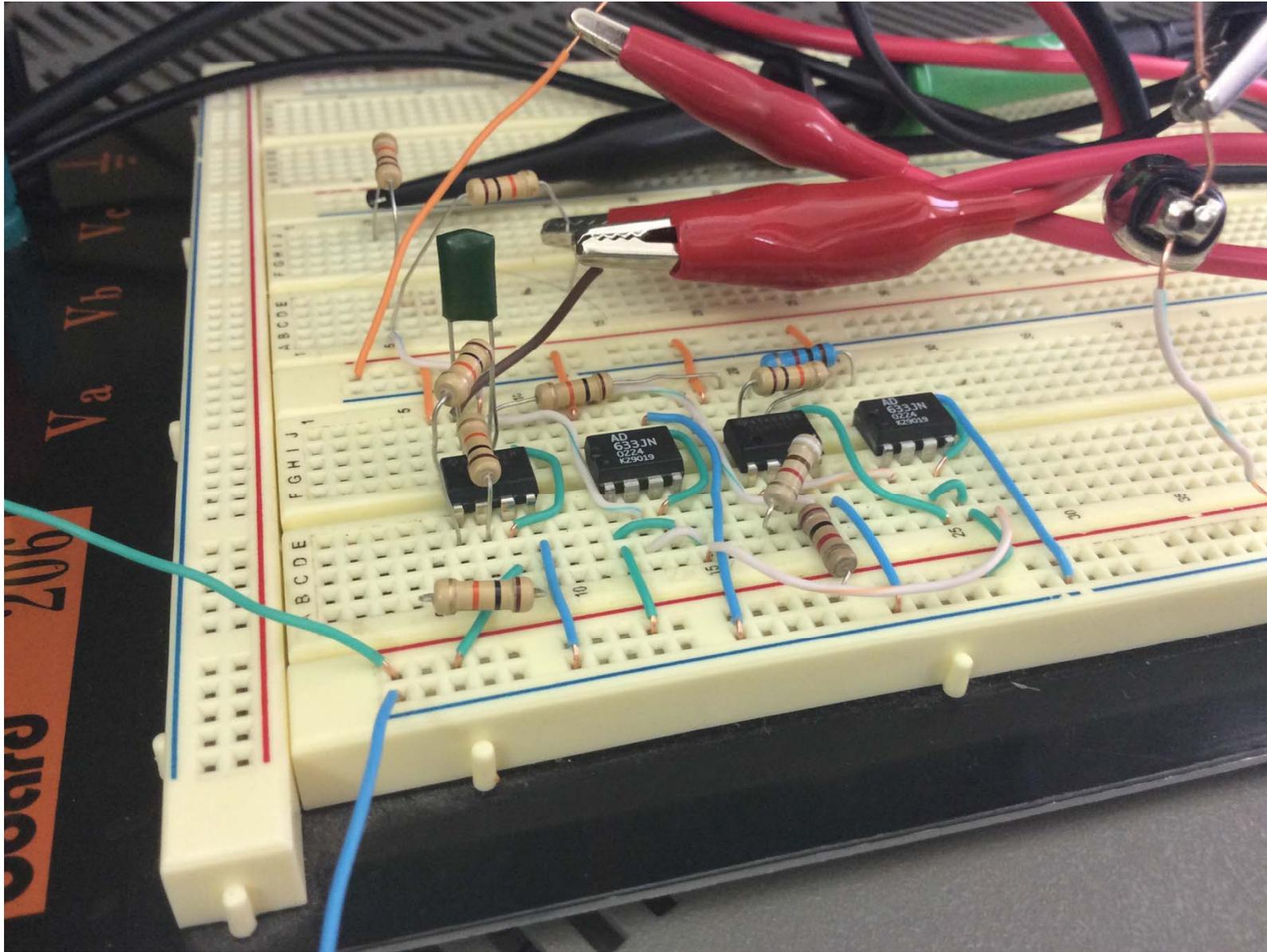


# Стохастический резонанс



# Стохастический резонанс

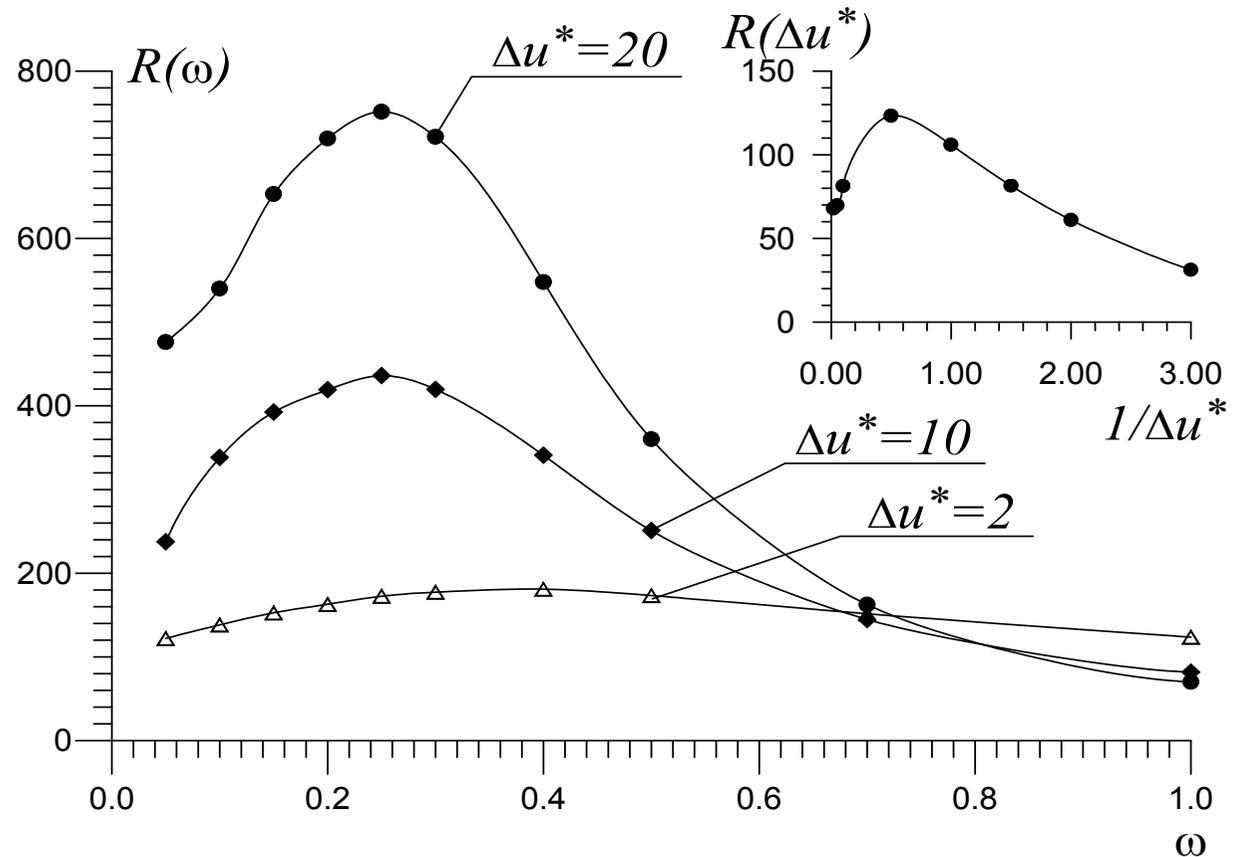




# Подавление шума сильным периодическим сигналом

$$\dot{x} = x - x^3 + A \sin(\omega t + \psi) + \xi(t)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{S_N(\omega)} \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \int_{\omega - \Delta\Omega}^{\omega + \Delta\Omega} S(\omega) d\omega$$



# Подавление ошибок переключения в устройствах БОК логики

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin(\varphi) - i(t) + i_F(t)$$

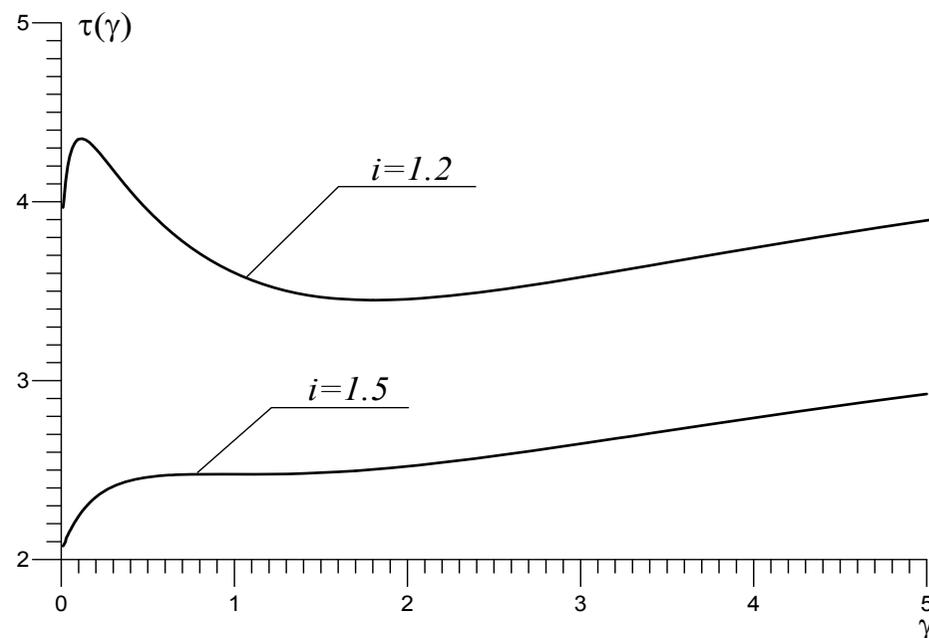
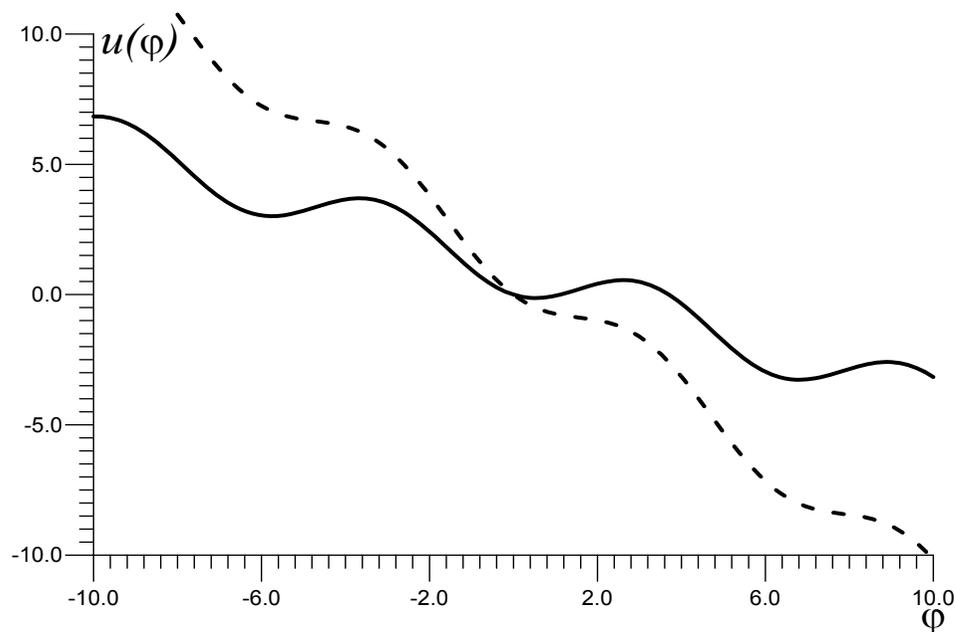
$$\tau = \langle t \rangle = \int_0^{\infty} tw(t)dt, \quad \sigma = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{i^2 - 1}} \arctan \left( \frac{i \tan(y/2) - 1}{\sqrt{i^2 - 1}} \right) \Big|_{y=x_0}^{y=d} + \right.$$

$$+ \gamma \left[ \frac{1}{2(i - \sin d)^2} + \frac{1}{2(i - \sin x_0)^2} \right] +$$

$$\left. + \gamma^2 \int_{x_0}^d \left[ \frac{3 \cos^2 y}{(i - \sin y)^5} - \frac{\sin y}{(i - \sin y)^4} \right] dy + \dots \right\}$$

# Задержка шумом распада неустойчивого состояния



Rylyakov A.V., Likharev K.K., **Pulse jitter and timing errors in RSFQ circuits**, IEEE Trans. Appl. Supercond. Vol. 9, 2. - P. 3539-3544 (1999).

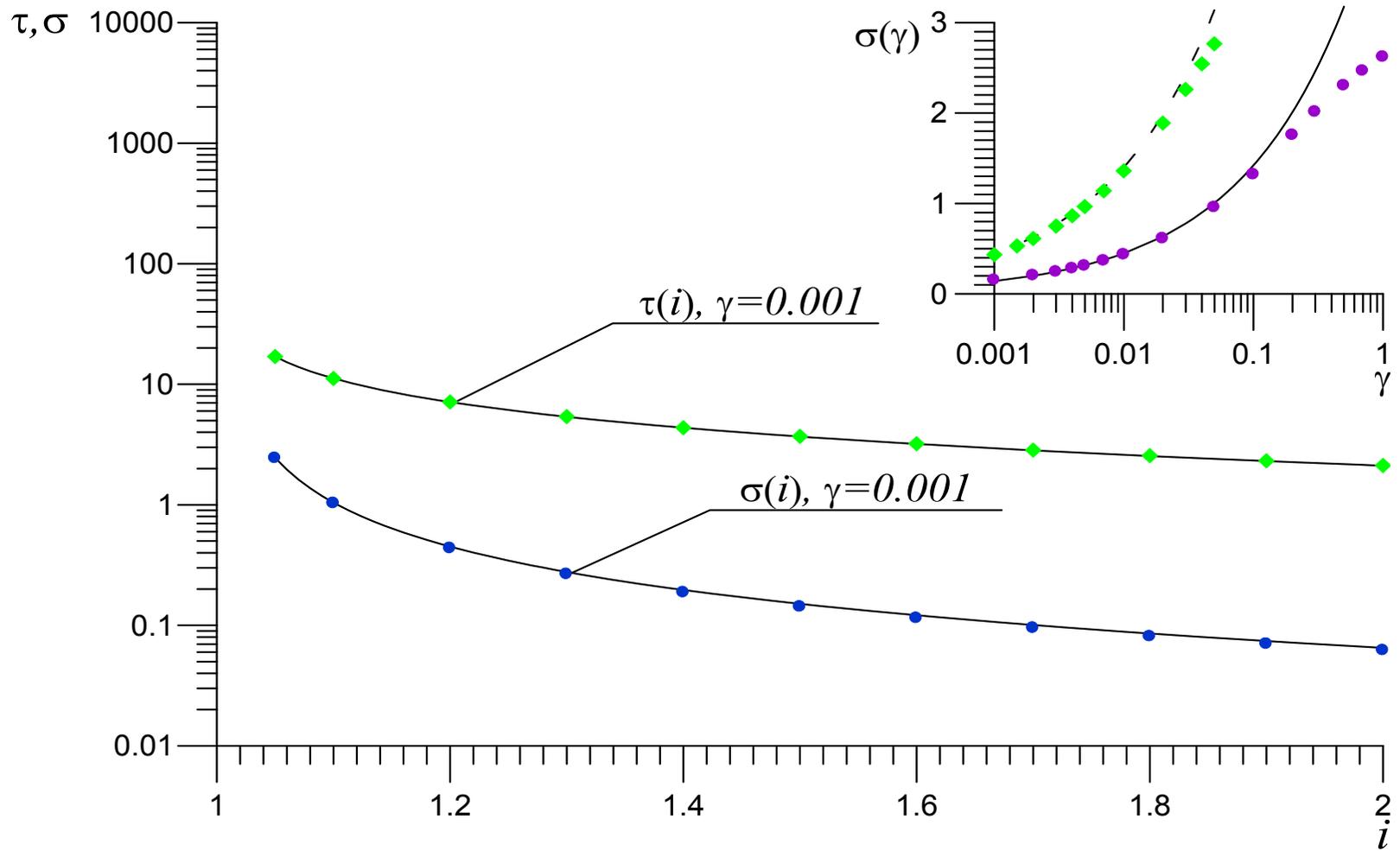
A.N. Malakhov, and A.L. Pankratov, Physica C, 269, 46 (1996).

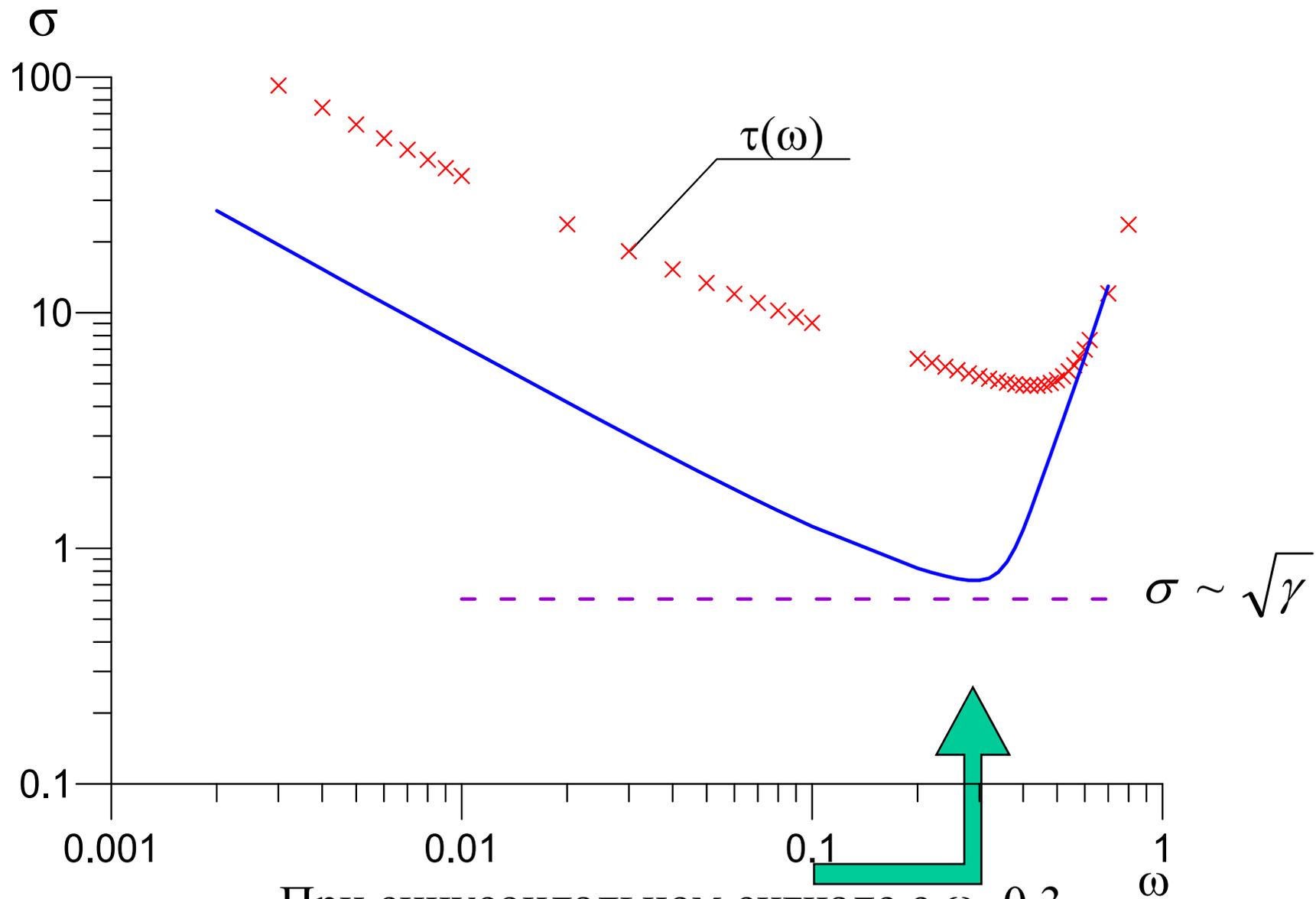
A.L. Pankratov and B. Spagnolo, Phys. Rev. Lett., 93, 177001 (2004).

V.K. Semenov and A. Inamdar, IEEE Trans. Appl. Supercond., 15, 435 (2005).

A.V. Gordeeva and A.L. Pankratov, Appl. Phys. Lett., 88, 022505 (2006).

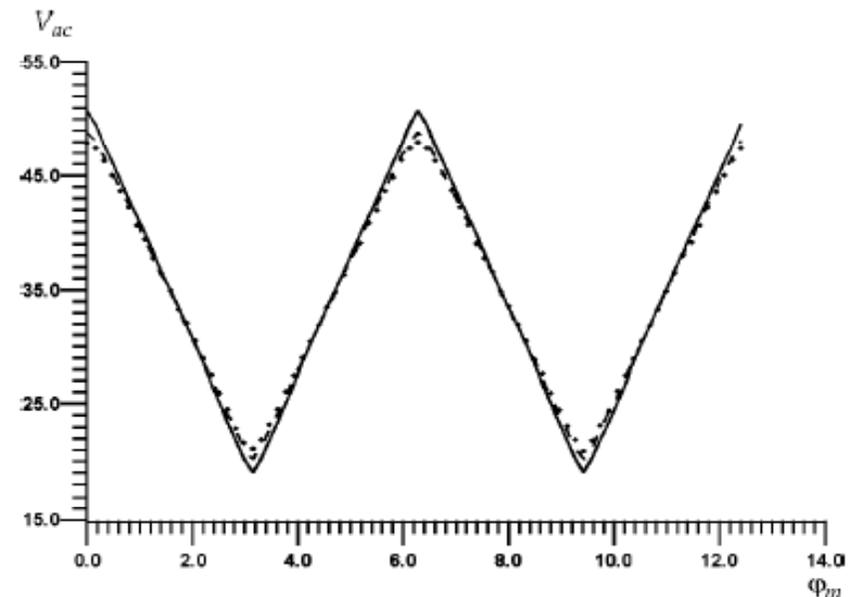
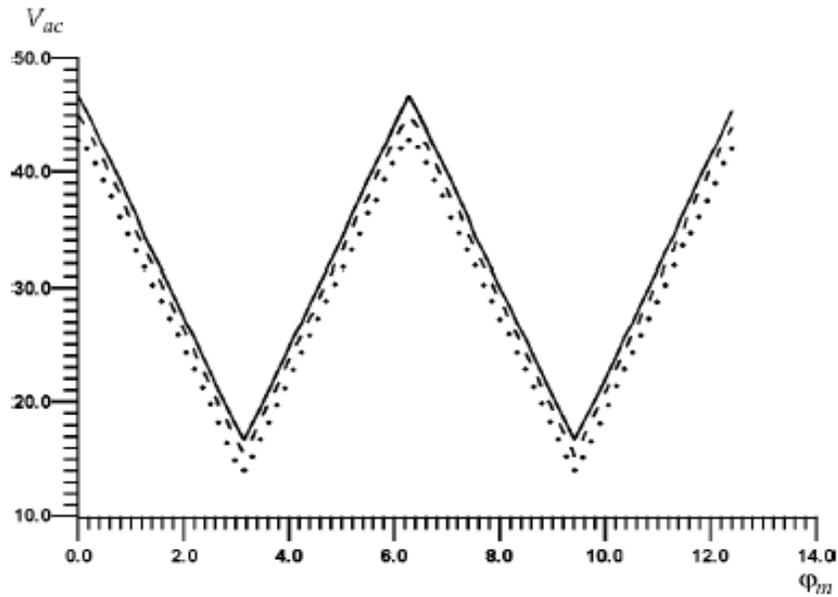
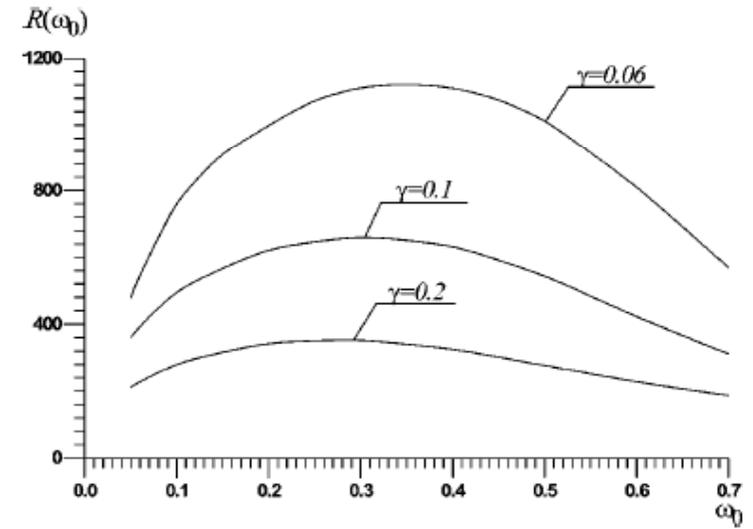
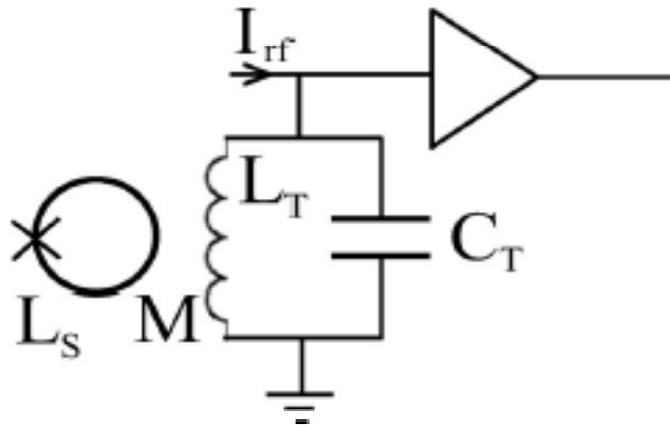
$$\sigma = \frac{1}{\omega_C} \sqrt{2\gamma[F(\varphi_2, \varphi_0) + f_3(\varphi_2, \varphi_0)] + \dots}$$





При синусоидальном сигнале с  $\omega \sim 0.3$   
 практически достигается СО для  
 телеграфного сигнала

# Повышение чувствительности СВЧ СКВИДа



# Высокоскоростное переключение магнитных диполей

## Уравнение Ландау-Лифшица

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{(1+\alpha^2)} \left[ \vec{M} \times \vec{H}_{eff} \right] - \frac{\gamma\alpha}{(1+\alpha^2)M_s} \left[ \vec{M} \times \left[ \vec{M} \times \vec{H}_{eff} \right] \right]$$

$\gamma$  - гиромагнитная константа,  $\alpha$  - затухание

$M_s$  - намагниченность насыщения

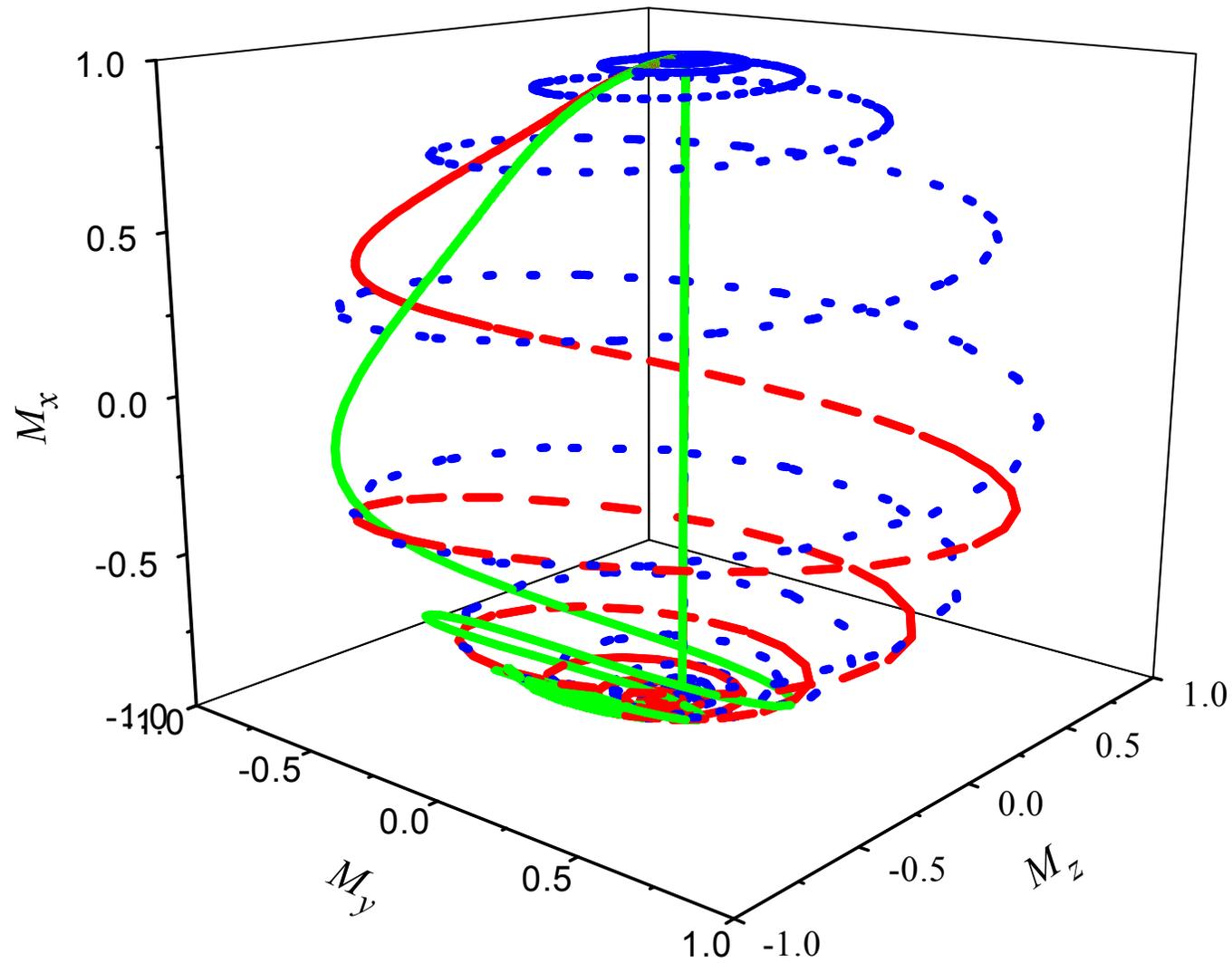
$$\overline{H}_{eff} = \overline{H}_a + \overline{H}_e + \overline{H}_T$$

$$\langle \vec{H}_T(t; \vec{r}) \rangle = 0 \quad \sigma^2 = \frac{2\alpha kT}{\gamma M_s V}$$

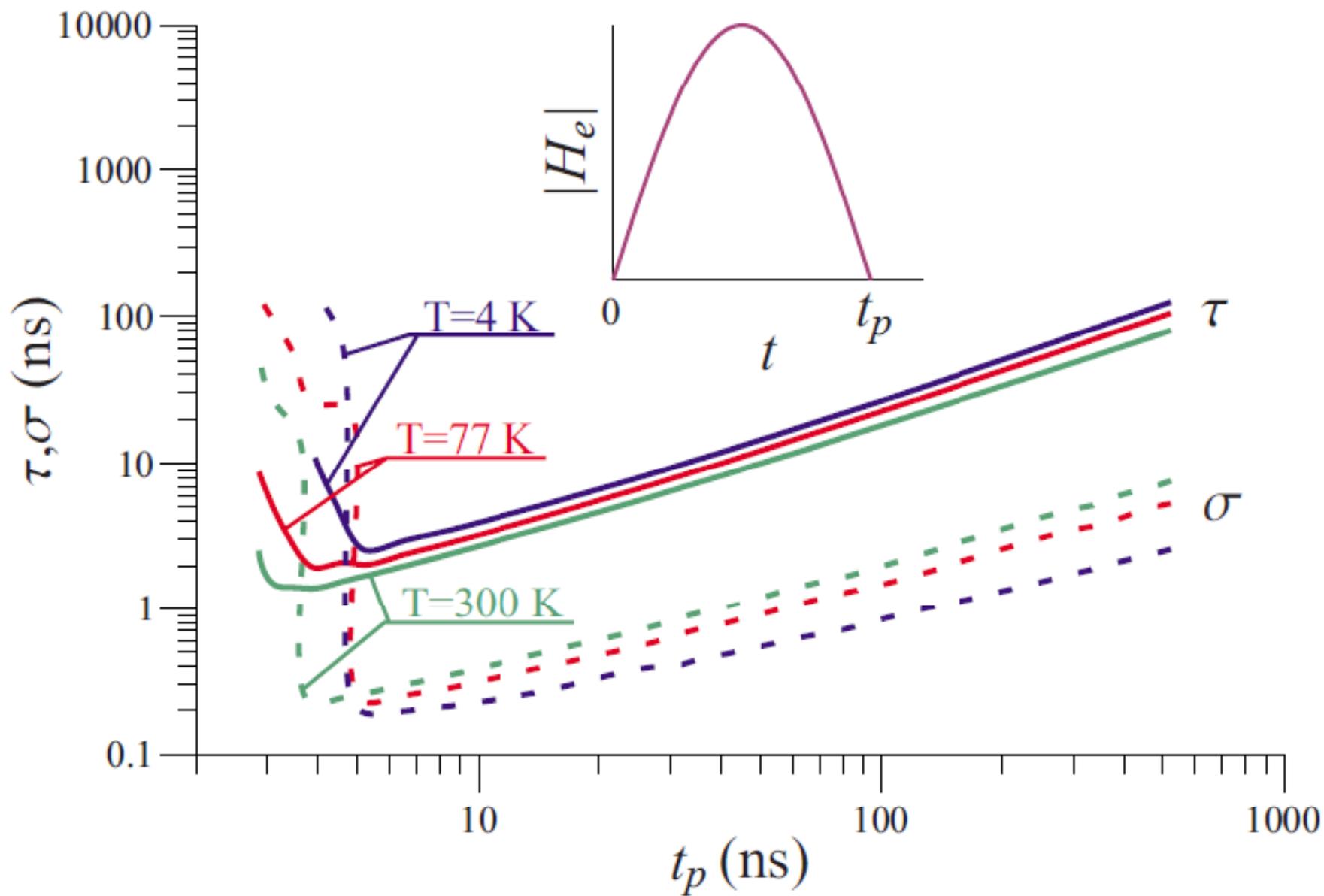
$$\langle H_i(t; \vec{r}), H_j(t'; \vec{r}') \rangle = \sigma^2 \delta(t-t') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{ij}$$

$$\vec{H}_a(\vec{r}) = \frac{2K_a}{M_s^2} \left( \vec{M}(\vec{r}), \vec{n}_a \right)$$

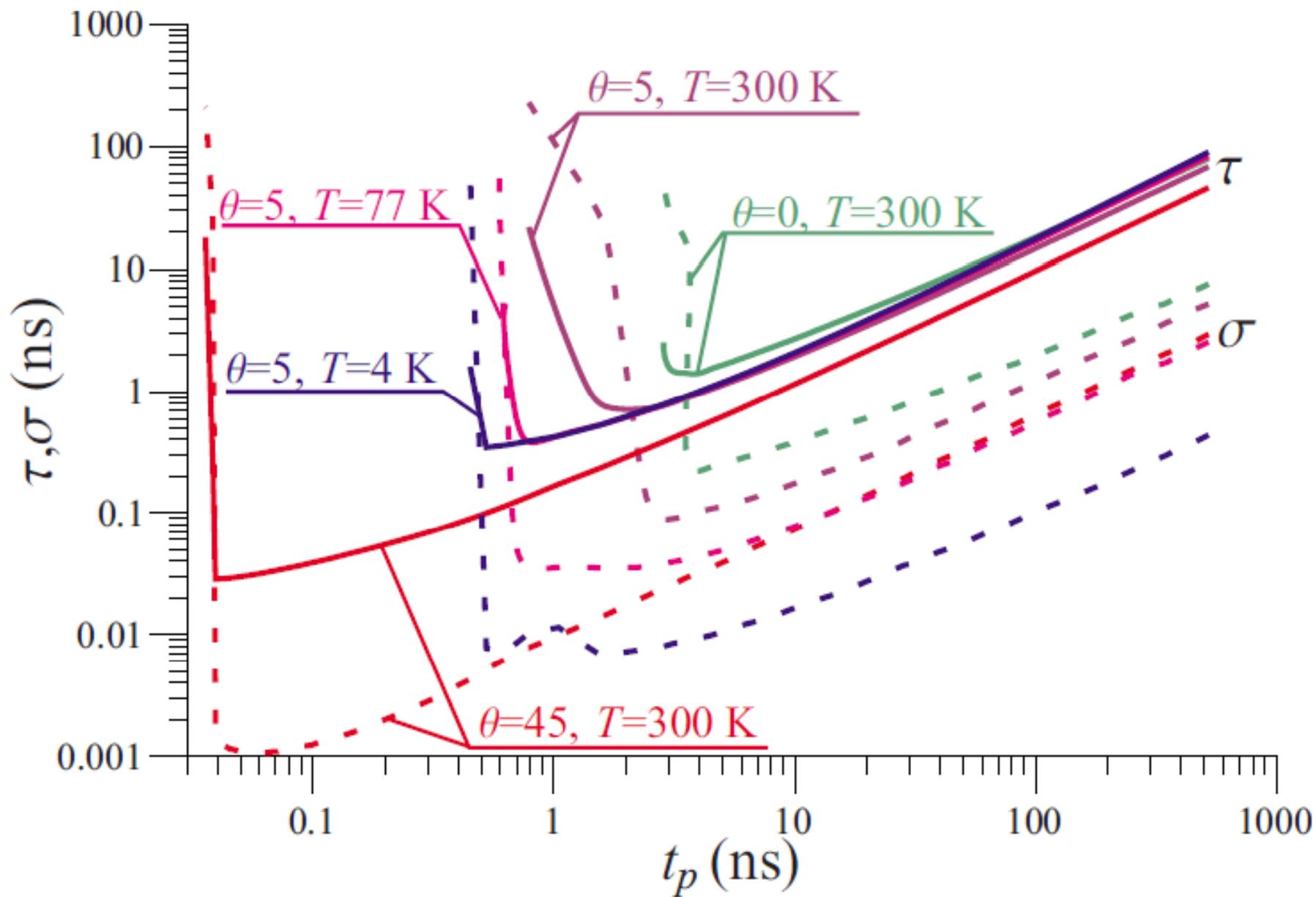
# Перемагничивание при различных углах



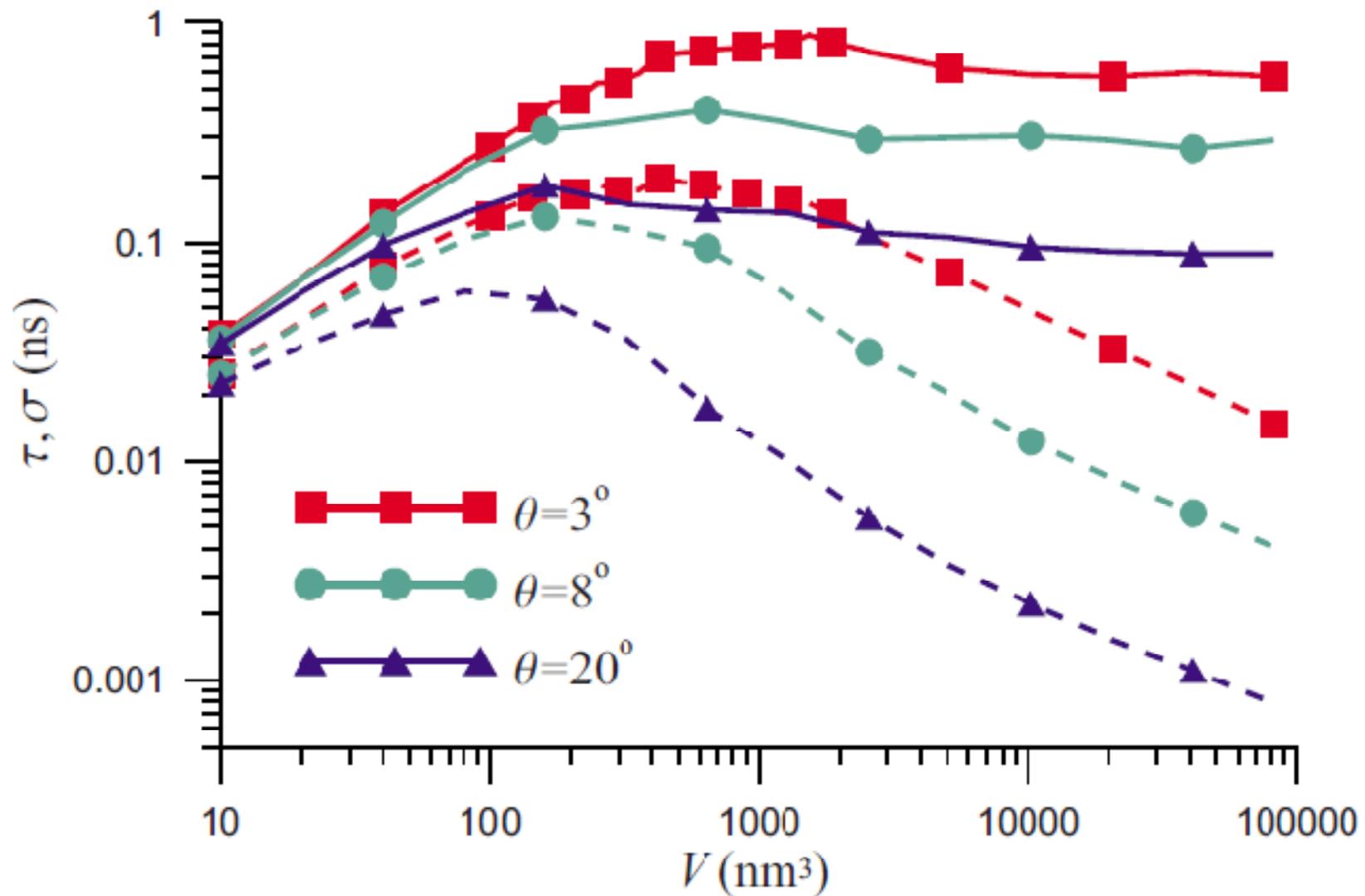
# Осевая симметрия

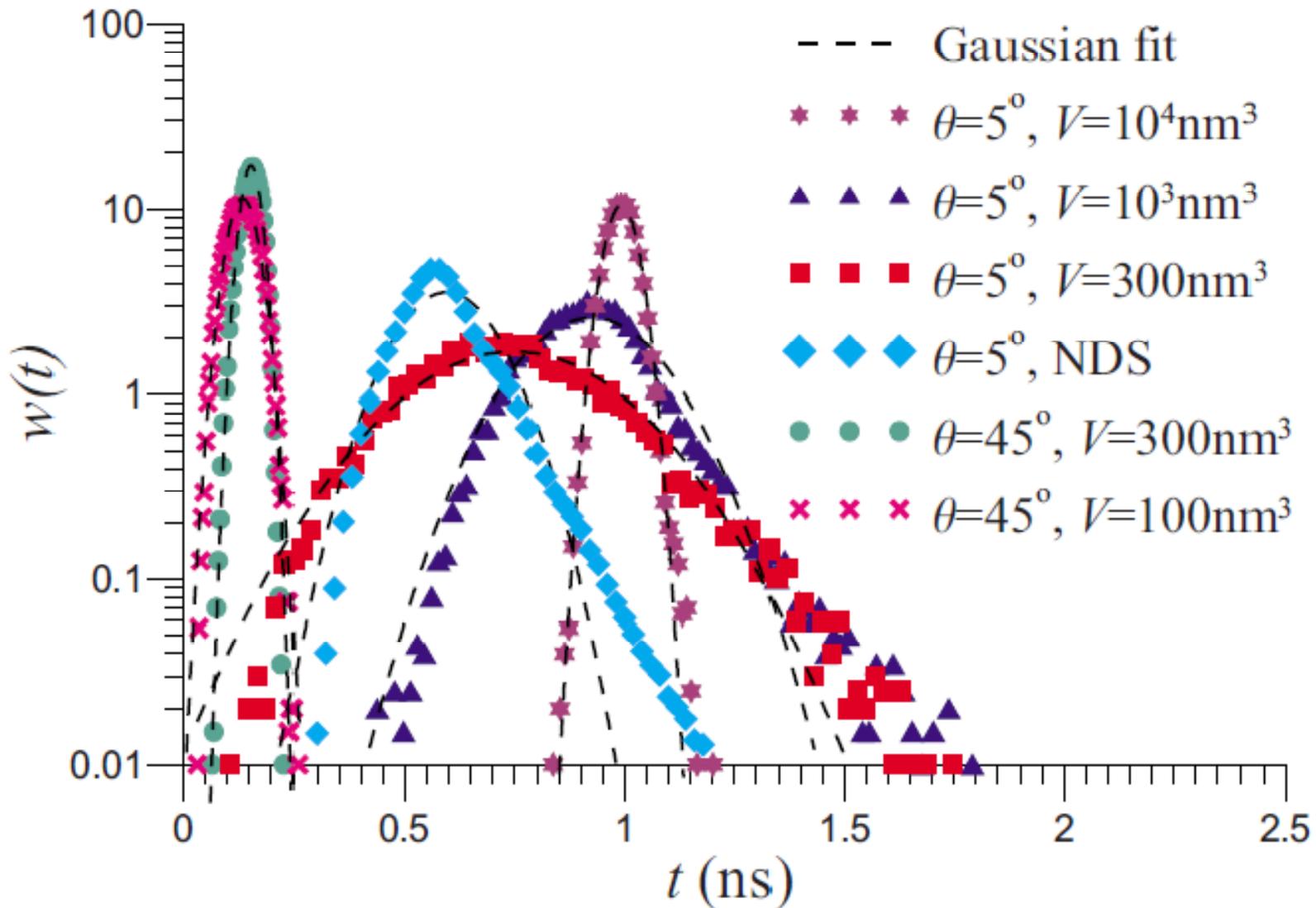


# Углы 0, 5, 45 градусов



## Зависимости от объёма частицы

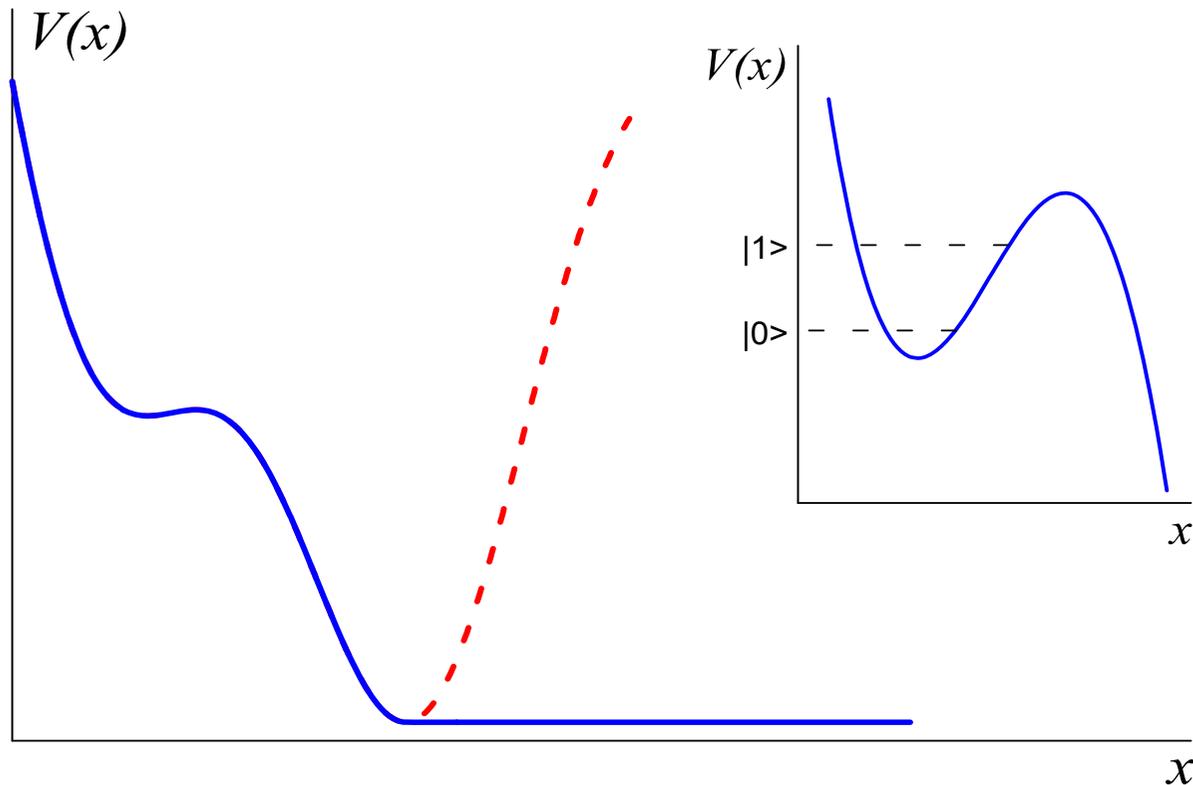




A.L. Pankratov, S.N. Vdovichev, I.M. Nefedov, Physical Review B, 78, 052401 (2008).  
 A.A. Smirnov, A.L. Pankratov, Physical Review B, 82, 132405 (2010).  
 A.L. Pankratov, S.N. Vdovichev, I.M. Nefedov, I.R. Karetnikova, Journal of Applied Physics, 109, 033906 (2011).

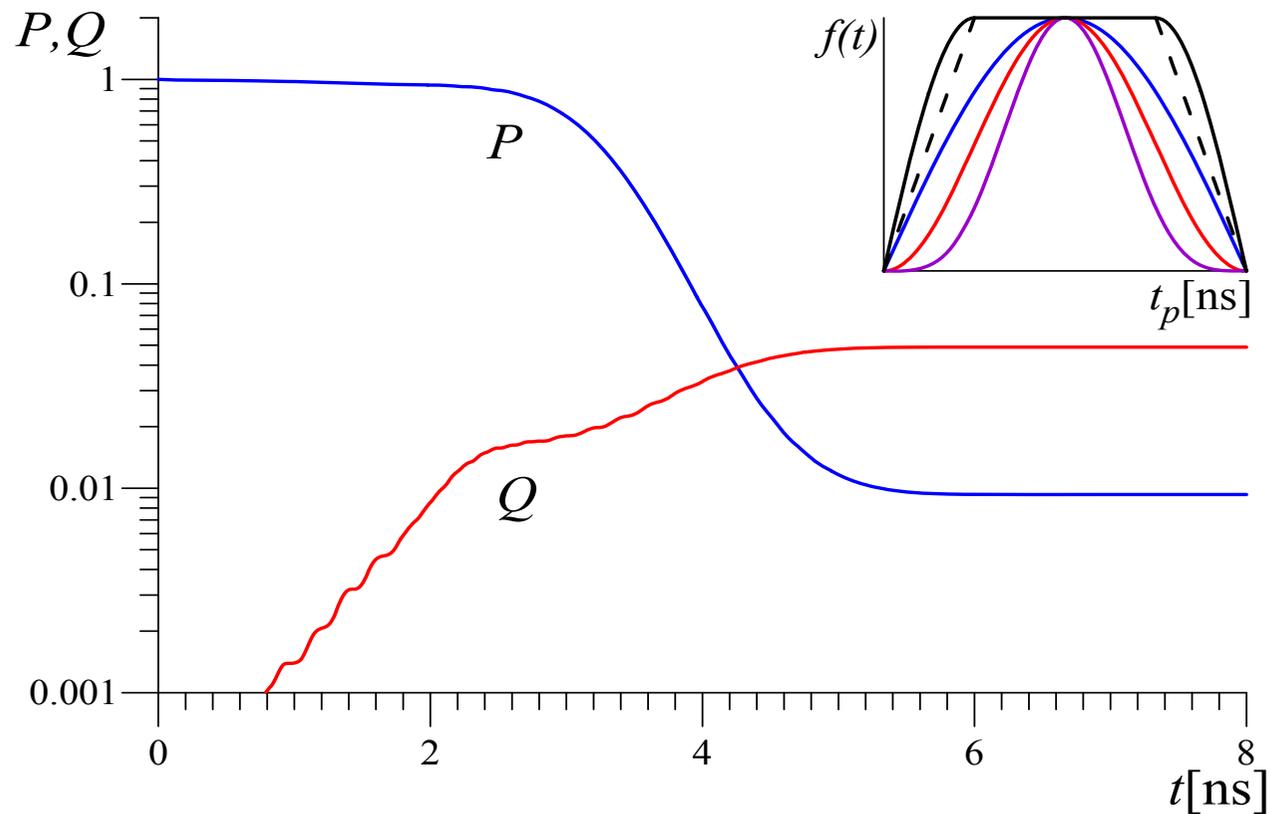
# Оптимальное быстрое считывание состояния кубита

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = - \frac{2e^2}{\hbar C} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{V(x, t)}{\hbar} \Psi(x, t)$$



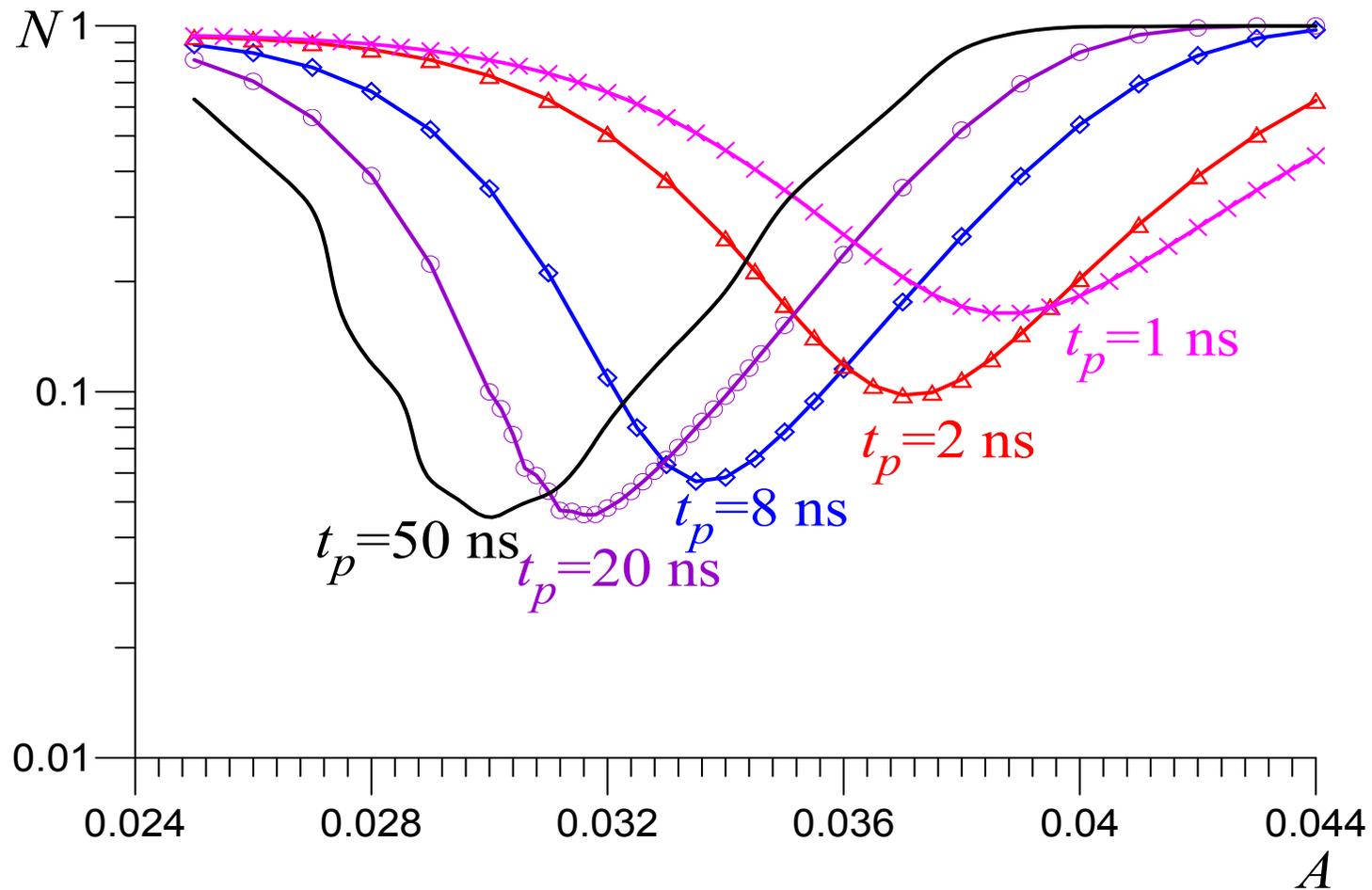
# Эволюция вероятности

$$N = P(t_p) + Q(t_p) = P_{10} + P_{01}, \quad F = 1 - N$$

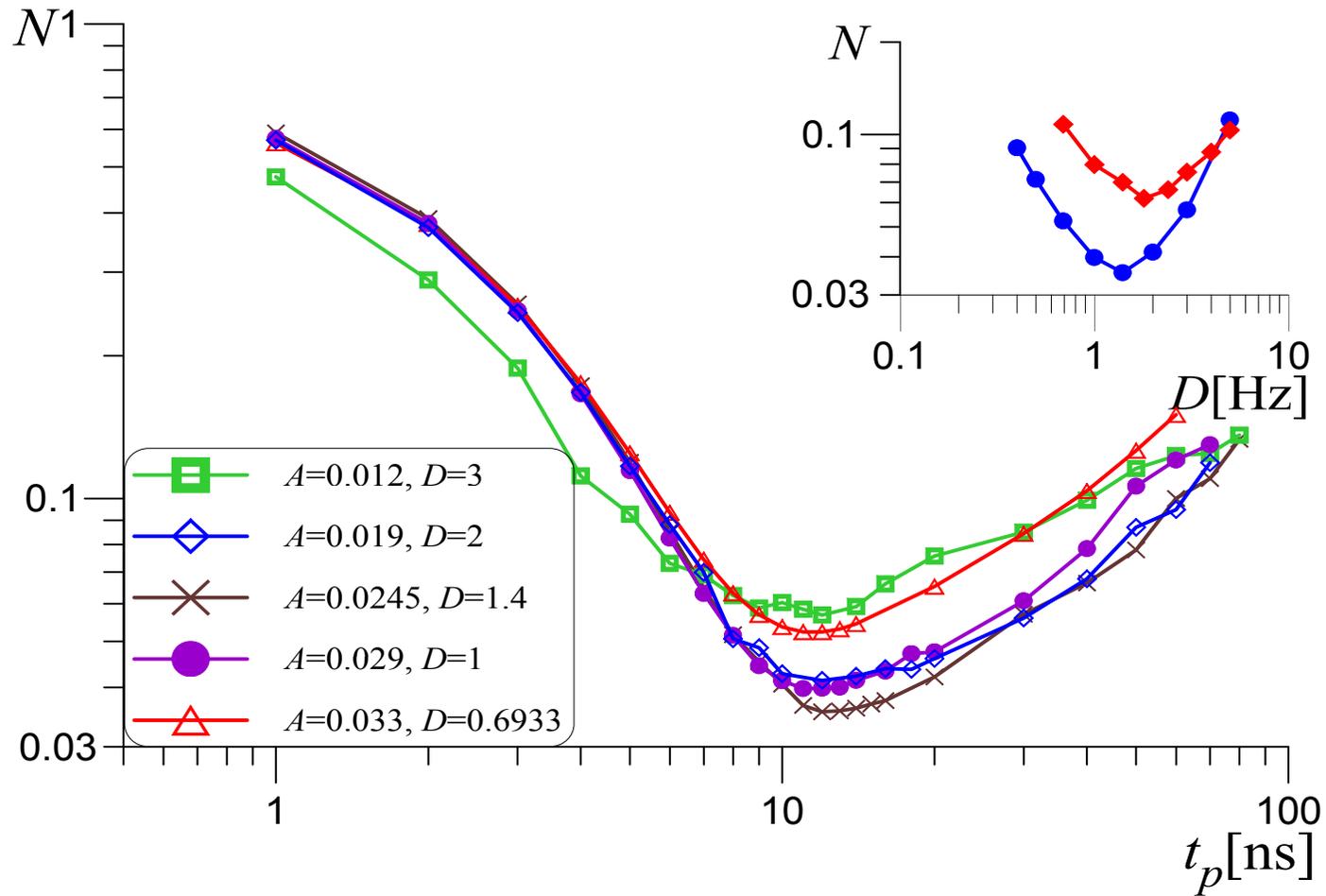


Q. Zhang, A. G. Kofman, J. M. Martinis, and A. N. Korotkov,  
Phys. Rev. B **74**, 214518 (2006).

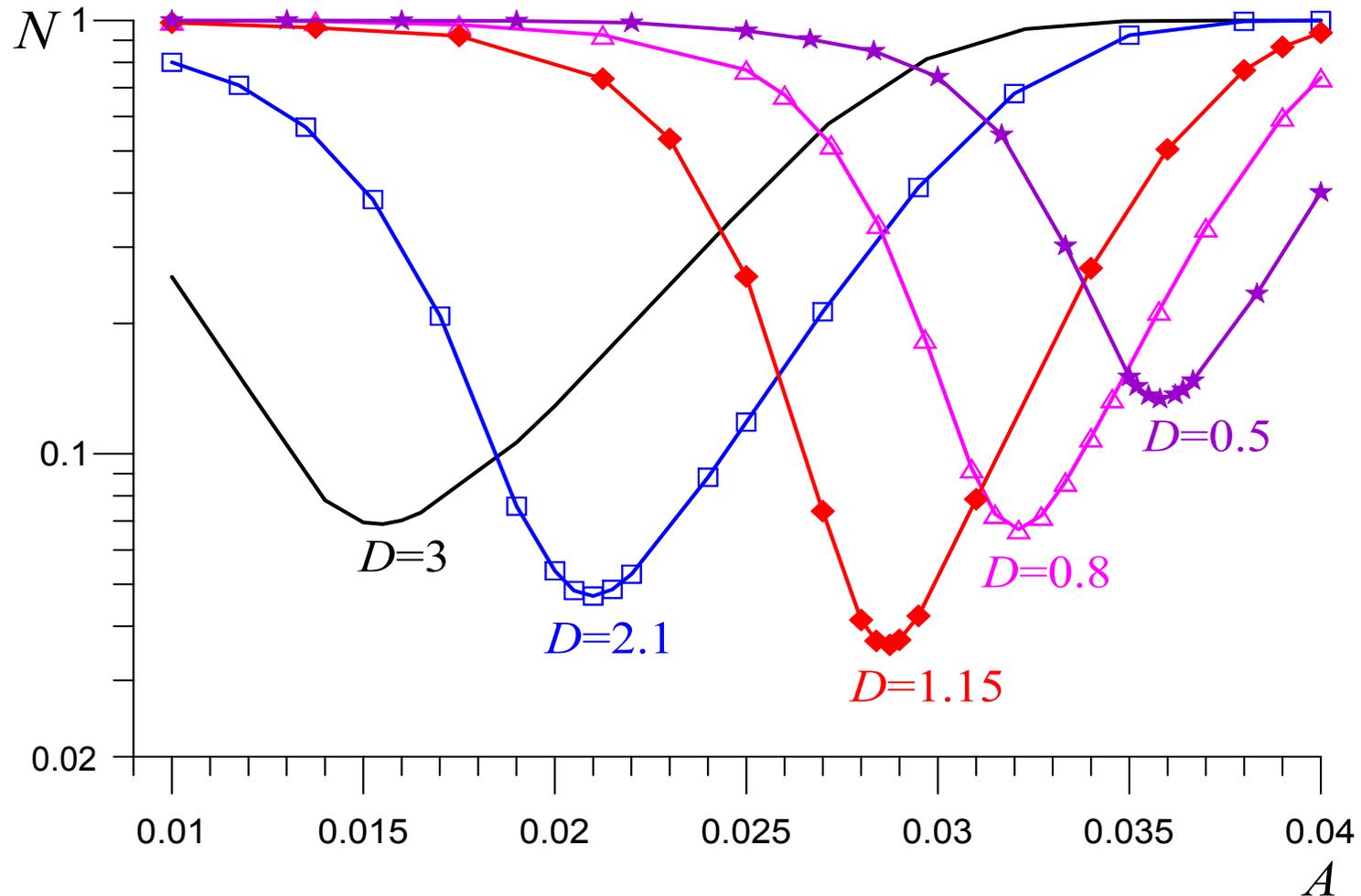
# Ошибка считывания как функция амплитуды импульса



# Ошибка считывания как функция длительности импульса



# Ошибка считывания как функция глубины потенциальной ямы



A.L. Pankratov and A.S. Gavrilov, Phys. Rev. B, 81, 052501 (2010).

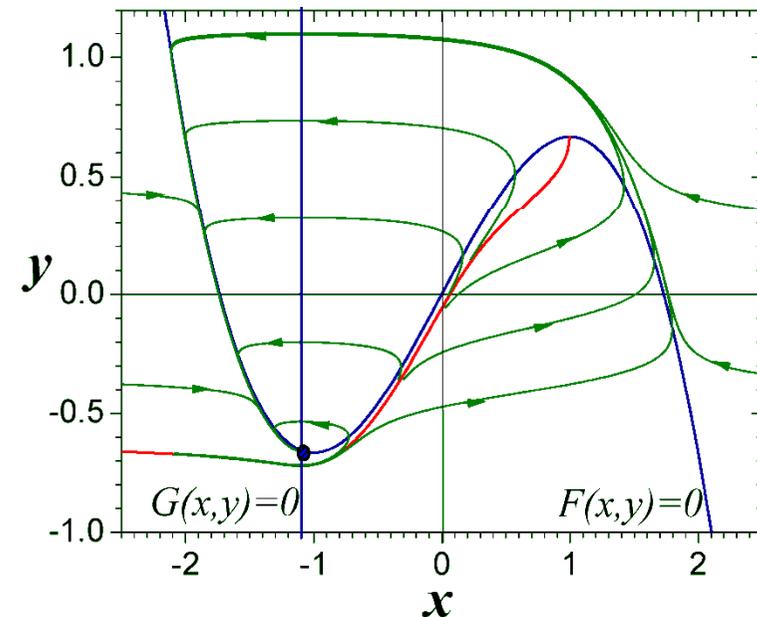
L.S. Revin and A.L. Pankratov, Appl. Phys. Lett., 98, 162501 (2011).

# Модели нейронов

Модель **ФитцХью-Нагумо** – двумерная модель, качественно описывающая способность нервной клетки генерировать импульсы действия. Одна из переменных модели,  $x$ , носит название переменной возбуждения (*excitation variable*) и имеет быстрый характер изменения во времени. Другая – восстанавливающая (*recovery variable*) переменная  $y$  – изменяется медленно:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) = x - x^3 / 3 - y \\ \dot{y} = G(x, y) = \varepsilon(x + I) \end{cases}$$

Фазовый портрет автономной системы ФитцХью-Нагумо. Синим цветом изображены изоклины горизонтальных и вертикальных наклонов; красным – линия, разделяющая потоки траекторий. Возможные фазовые траектории, полученные при различных начальных условиях, изображены зеленым цветом.



Модель **Ходжкина-Хаксли** – четырехмерная модель нервной клетки, описывающая возбудимые свойства мембран с помощью уравнений баланса ионных токов через мембрану.

$$C_m \frac{dv}{dt} = -G_K n^4 (v - v_K) - G_{Na} m^3 h (v - v_{Na}) - G_L (v - v_L) + S(t) + \xi(t);$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m m; \quad \frac{dh}{dt} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h h; \quad \frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n.$$

Здесь  $v$  задает отклонение мембранного потенциала от равновесного состояния ( $V = V_{eq} + v$ ). Шум  $\xi(t)$  - белый гауссов с нулевым средним и корреляционной функцией  $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D \delta(\tau)$ .

Влияние шума на возникновение спайков в системе рассматривается в условиях существования внешнего надпорогового периодического воздействия  $S(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi_0)$ .

Значения параметров максимальных проводимостей для натриевого, калиевого каналов и канала утечки соответственно равны:

$$G_{Na} = 120 \text{ mS/cm}^2, \quad G_K = 36 \text{ mS/cm}^2, \quad G_L = 0.3 \text{ mS/cm}^2;$$

$$\text{Емкость мембраны } C_m = 1 \text{ } \mu\text{F/cm}^2.$$

$$\text{Равновесные потенциалы: } v_{Na} = 115 \text{ mV}, \quad v_K = -12 \text{ mV}, \quad v_L = 10.6 \text{ mV}.$$

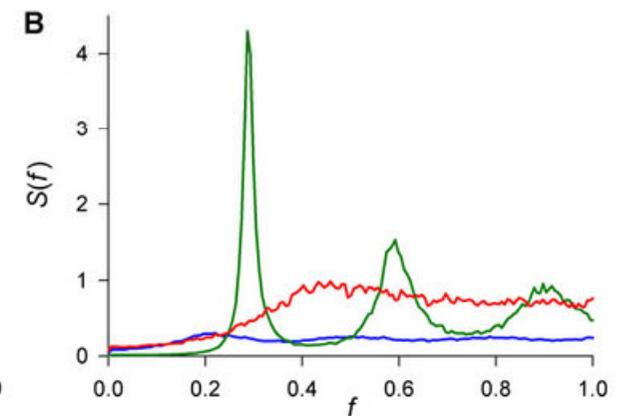
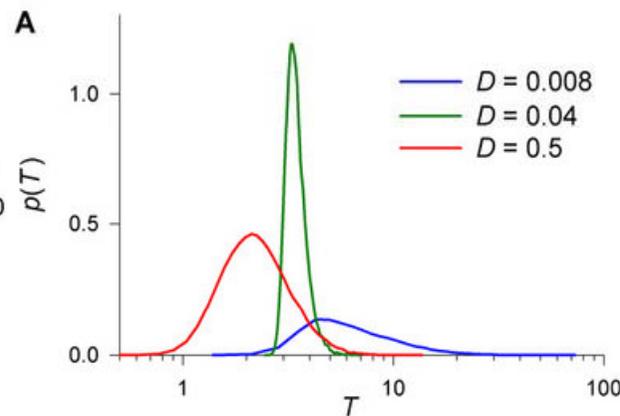
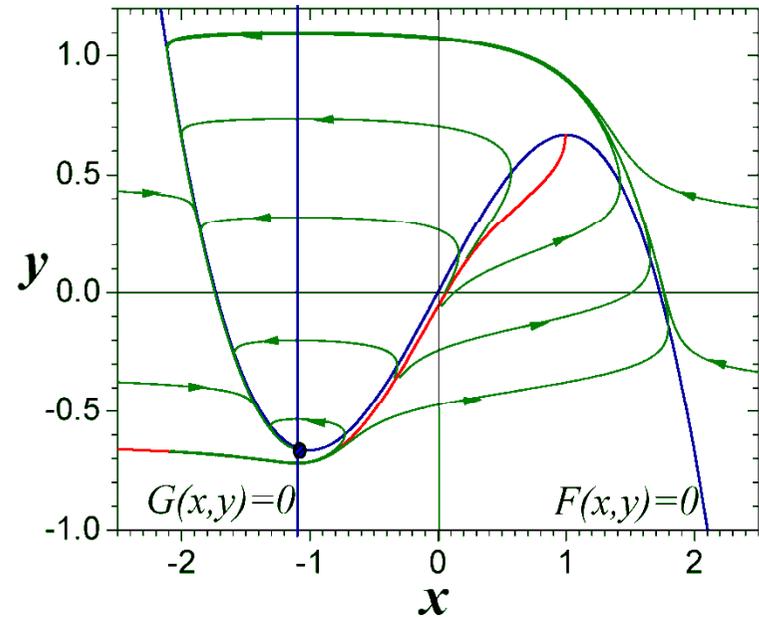
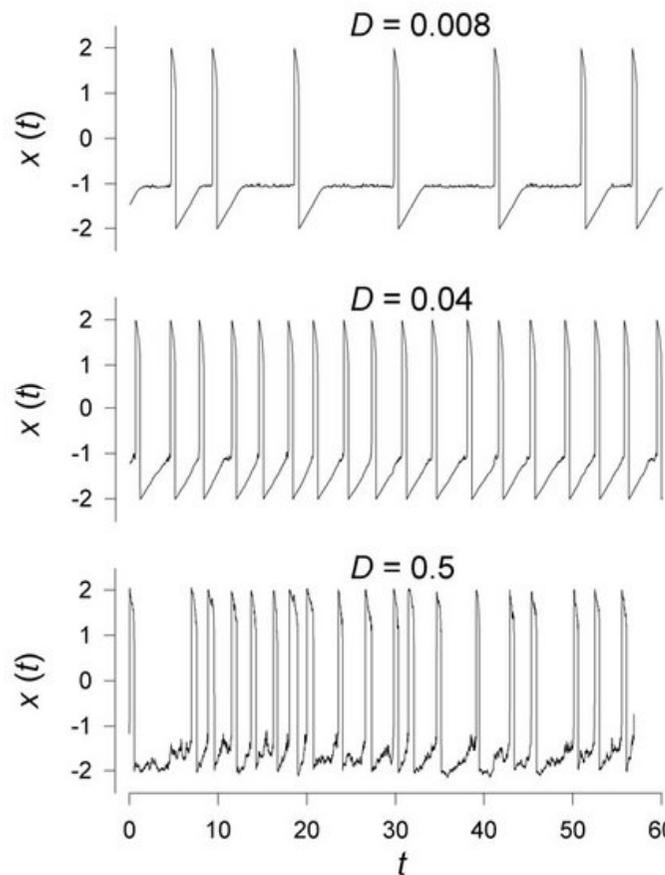
В результате анализа кинетических кривых активации и инактивации А. Ходжкиным и А. Хаксли были построены графические зависимости скоростей  $\alpha_m, \beta_m, \alpha_n, \beta_n, \alpha_h, \beta_h$  от мембранного потенциала и подобраны эмпирические соотношения, описывающие ход указанных зависимостей:

$$\alpha_m = \frac{0.1(25 - v)}{\exp\{(25 - v)/10\} - 1}; \quad \alpha_n = \frac{0.01(10 - v)}{\exp\{(10 - v)/10\} - 1}; \quad \alpha_h = 0.07 \exp\left\{\frac{-v}{20}\right\};$$

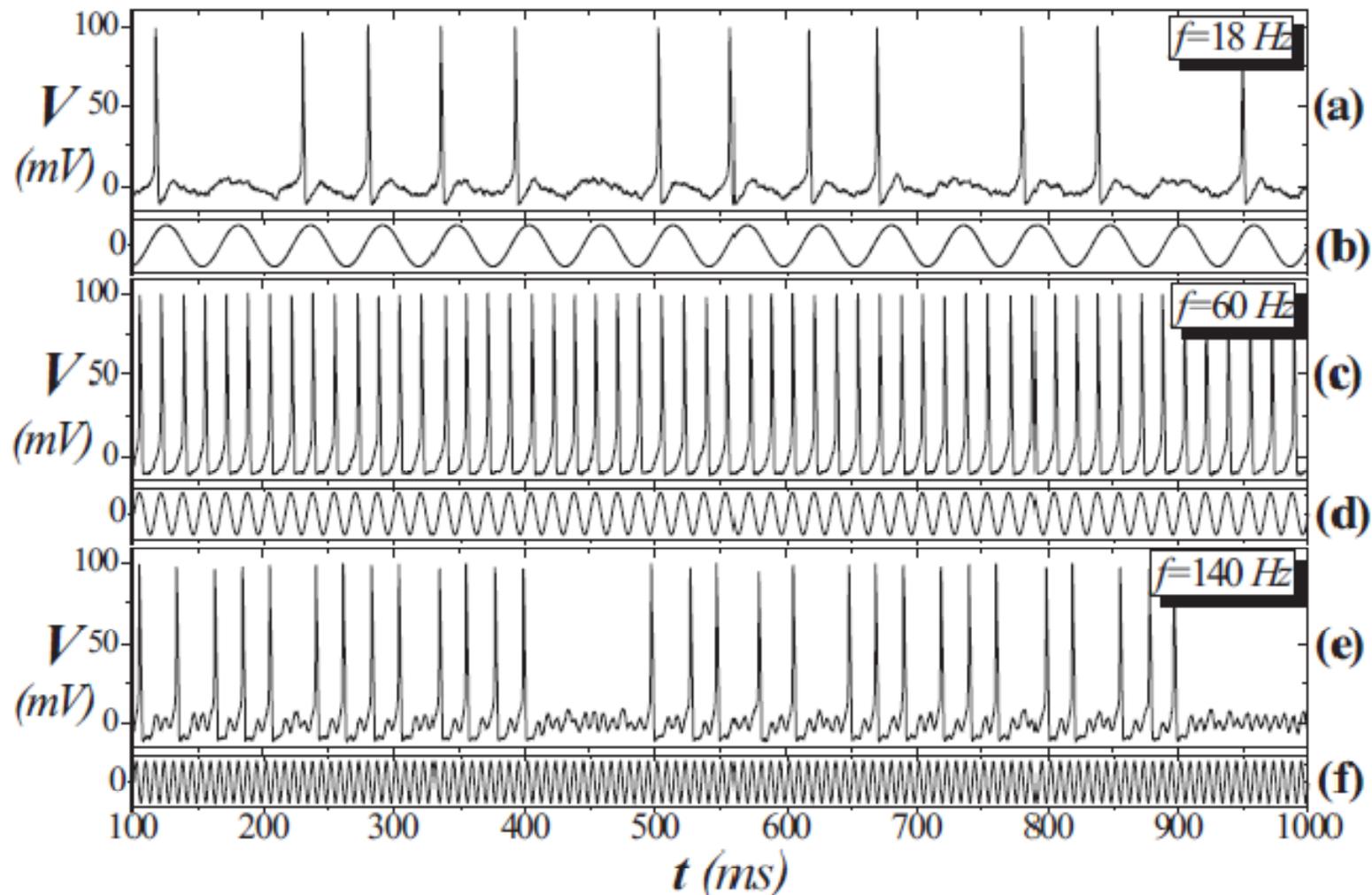
$$\beta_m = 4 \exp\left\{\frac{-v}{80}\right\}; \quad \beta_n = 0.125 \exp\left\{\frac{-v}{80}\right\}; \quad \beta_h = (\exp\{(30 - v)/10\} + 1)^{-1};$$

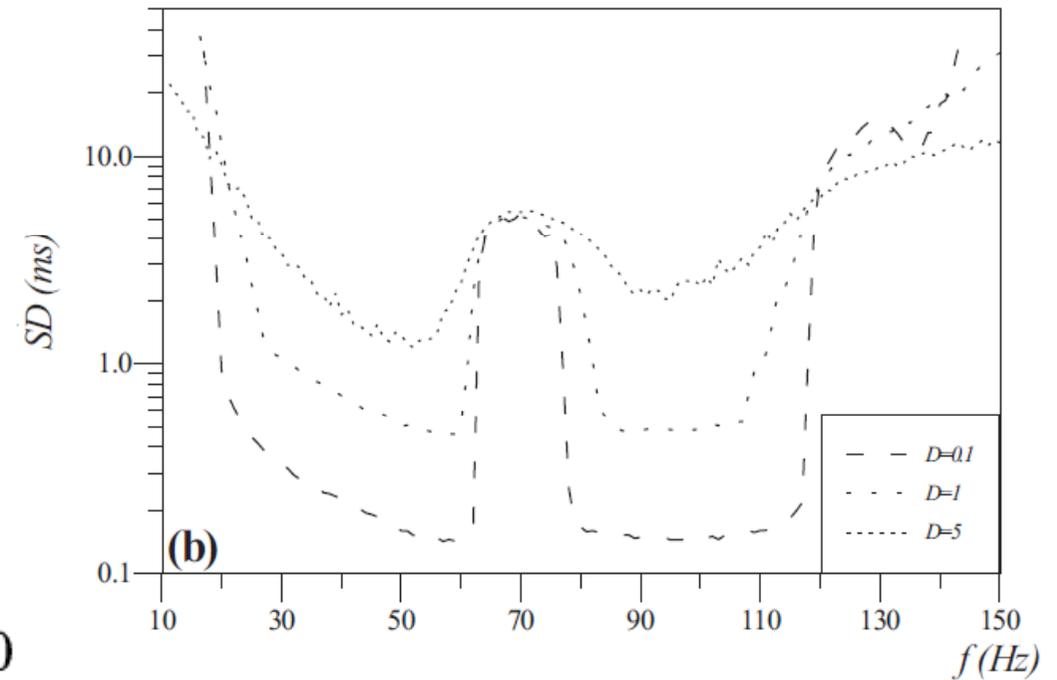
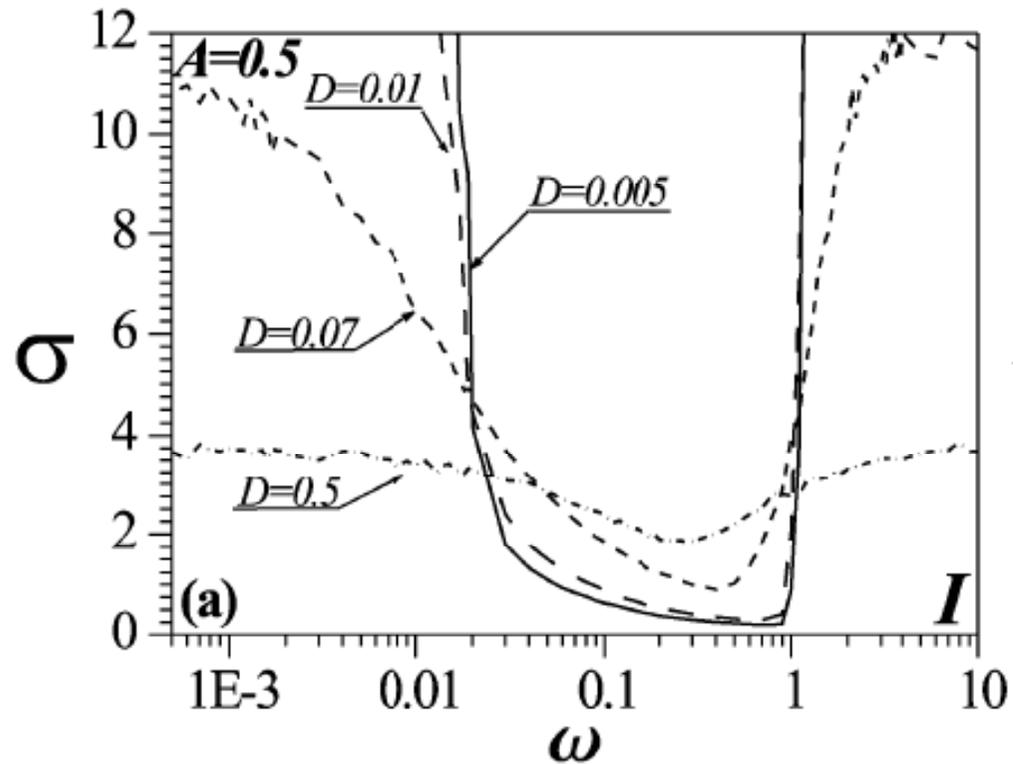
# Когерентный резонанс

Pikovsky AS, Kurths J, Coherence resonance in a noise-driven excitable system. Physical Review Letters 78:775-778 (1997).



# Подавление шума в нейронных системах





E.V. Pankratova, V.N. Belykh and E. Mosekilde, Eur. Phys. Journal B, 00401 (2006).

E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin and B. Spagnolo, Phys. Lett. A, 344, 43 (2005).

E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin and E. Mosekilde, Eur. Phys. Journ. B, 45, 391 (2005).

# Случайные процессы в нелинейных системах

## Лекция 1

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН, ГСП 105,  
Нижний Новгород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

Цель данного курса - дать студентам и аспирантам, заинтересованным в исследовании случайных процессов в нелинейных системах, средство для решения практических задач стохастической динамики. В данном курсе в основном рассматриваются одномерные случайные процессы диффузионного типа. Математически это соответствует случаю одномерных непрерывных марковских процессов, описываемых уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова. В дополнение к основам теории случайных процессов, будут описаны классические методы исследования уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, а также новые подходы, удобные для решения прикладных задач. В заключение курса будут описаны интересные индуцированные шумом эффекты в нелинейных системах, такие как стохастический резонанс, рэтчет эффект, эффект подавления шума переключающимися сигналами, а также описаны прикладные задачи джозефсоновской электроники.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Шум является общим свойством различных процессов в физике, химии и биологии. Шум возникает при описании макроскопических систем. Если система включает в себя большое число степеней свобод, она является очень сложной и обычно при ее описании следят только за несколькими наиболее важными переменными. Остальные переменные не принимаются во внимание и поэтому объявляются "шумом" или "флуктуациями".

Исследование временных масштабов (или скоростей переходов) и эволюций вероятности в различных мультстабильных системах, находящихся под воздействием шума, является крайне важным в большом числе направлений физики, таких как фазовые переходы, джозефсоновская электроника, магнитные системы. Одна из пионерских работ в этом направлении была выполнена Крамерсом [1]. Он рассмотрел процесс перехода из одного состояния системы в другое как процесс броуновской диффузии и использовал уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности броуновской частицы для нахождения нескольких приближенных формул для описания скоростей перехода. Главный подход метода Крамерса - это предположение, что поток вероятности через потенциальный барьер мал, и в силу этого постоянен. Это условие применимо только в случае, когда потенциальный барьер достаточно высокий по сравнению с интенсивностью шума. Для получения точных временных масштабов и плотностей вероятности необходимо решить нестационарное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, что является основной сложностью проблемы исследования переходных процессов диффузионного типа.

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова - это уравнение в частных производных. В подавляющем большинстве случаев его аналитическое решение не известно. Также, в многомерном случае даже нахождение стационарного решения удается не всегда. Поэтому, при анализе динамики переходных процессов диффузионного типа, наиболее простым подходом является приближенное нахождение временных характеристик. Следует отметить, что нестационарное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова простой заменой переменных и заменой действительного времени на мнимое сводится к нестационарному уравнению Шредингера, так что при решении этих уравнений исследователь сталкивается с одними и теми же проблемами. Таким образом, теория случайных процессов в классических системах, и теория квантовых систем имеют много общего.

Рассматривая процесс одномерной броуновской диффузии (т.е. броуновское движение в пре-

деле большой вязкости), следует отметить, что для ее описания используются различные временные характеристики, описываемые различным образом (см. обзоры [2], [3] и книги [4],[5]), например время жизни метастабильного состояния, или время релаксации к стационарному состоянию. Часто используемый метод разложения решения в ряд по собственным функциям, когда характерный временной масштаб (время релаксации) предполагается равным обратному минимальному ненулевому собственному числу, неприменим для случая больших интенсивностей шума, поскольку тогда высшие собственные числа должны приниматься во внимание. В случае одномерного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, моменты времени первого достижения (ВПД) поглощающей границы могут быть вычислены точно, по крайней мере могут быть выражены в квадратурах [6]. Но при методе ВПД предполагается наличие в системе поглощающих границ. Однако, в большом числе прикладных физических задач системы описываются гладкими потенциальными профилями, не имеющими поглощающих границ, и моменты ВПД могут дать некорректный результат для исследуемых временных масштабов.

Данный курс, в добавление к классическим методам, представит новые аналитические подходы для получения точных временных характеристик диффузионных процессов, позволяющие также в ряде случаев описать эволюцию вероятностей случайных процессов.

## II. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Необходимым аппаратом для описания случайных процессов является аппарат обобщенных функций. Прежде всего, для представления дальнейшего материала нам потребуется обсудить свойства дельта-функции  $\delta(x-a)$ . Дельта-функция  $\delta(x-a)$  равна нулю везде кроме точки  $x = a$ , в которой она принимает бесконечное значение. Дельта-функция может быть представлена как предельный случай гауссовского распределения:

$$\delta(x-a) = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2D}}.$$

Дельта-функция  $\delta(x-a)$  имеет следующие свойства:

1. Первое интегральное свойство.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1. \quad (1)$$

Следует отметить, что достаточно рассмотреть этот интеграл только в окрестности точки  $x = a$ :

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x-a) dx = 1.$$

2. Функция единичного скачка обычно вводится в следующем виде:

$$1(x-a) \equiv \int_{-\infty}^x \delta(y-a) dy = \begin{cases} 1, & x > a \\ 1/2, & x = a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (2)$$

3. Дельта-функция является четной по отношению к точке  $a$ :

$$\int_{-\infty}^a \delta(x-a) dx = \int_a^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1/2. \quad (3)$$

4. Второе интегральное свойство:

$$\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)f(a),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a)f(x)dx = f(a), \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^a \delta(x - a)f(x)dx = \int_a^{+\infty} \delta(x - a)f(x)dx = \frac{1}{2}f(a).$$

5. Если  $C$  - константа, то:

$$\delta[C(x - a)] = \frac{1}{|C|}\delta(x - a). \quad (5)$$

6. Если  $\alpha(x)$  плавная функция и  $x_k$  - корни уравнения  $\alpha(x) = 0$ , расположенные в интервале  $(a, b)$  тогда (третье интегральное свойство):

$$\begin{aligned} \delta[\alpha(x)] &= \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|\alpha'_x(x)|_{x=x_k}}, \\ \int_a^b f(x)\delta[\alpha(x)]dx &= \sum_k \frac{f(x_k)}{|\alpha'_x(x)|_{x=x_k}}. \end{aligned} \quad (6)$$

7. Как выглядит производная дельта-функции? Можно легко взять производную нужного порядка от гауссовского распределения и устремить дисперсию  $D$  к нулю:

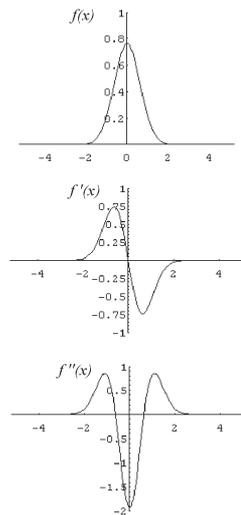


Рис. 1: Гауссовское распределение и его производные.

Четвертое интегральное свойство:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x - y)g(x)dx &= (-1)^n g^{(n)}(y), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(y - x)g(x)dx &= g^{(n)}(y). \end{aligned} \quad (7)$$

### III. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ОДНОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Будем называть  $\xi$  случайной величиной, если значение  $\xi$  не может быть предсказано (например, из-за неизвестных начальных условий, или других неизвестных обстоятельств). Повторяя эксперимент  $N$  раз ( $N$  реализаций) получим  $N$  чисел:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N.$$

Эти числа  $\xi_i$  могут принимать целые или вещественные значения.

Вместо повторения экспериментов с одной системой  $N$  раз можно также представить, что у нас есть ансамбль из  $N$  идентичных систем и провести по одному эксперименту для каждой системы.

В то время как числа  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  не могут быть предсказаны, некоторые средние при  $N \rightarrow \infty$  могут быть предсказаны, и должны дать одинаковые значения для идентичных систем. Простейшей средней величиной является математическое ожидание (среднее):

$$\langle \xi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N).$$

В общем случае среднюю величину можно выразить как:

$$\langle f(\xi) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_N)). \quad (8)$$

где  $f(\xi)$  некоторая произвольная функция.

*Плотность вероятности*

Если выбрать функцию в (8) в виде смещенной функции единичного скачка

$$f(\xi) = 1(x - \xi) \quad (9)$$

получим

$$P(\xi < x) + (1/2)P(\xi = x) = \langle 1(x - \xi) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} [\langle 1(x - \xi_1) + \dots + 1(x - \xi_N) \rangle] / N = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N. \quad (10)$$

Определение (10) отличается от обычного другим весовым коэффициентом вероятности при  $\xi = x$  из-за выбранного нами определения функции единичного скачка (2). Если бы мы определили  $1(x) = 1$  для  $x \geq 0$  и  $1(x) = 0$  для  $x < 0$ , тогда левую часть надо было бы заменить на  $P(\xi \leq x)$ . Для непрерывных случайных процессов (а только такие мы будем рассматривать в рамках данного курса), где вероятность нахождения в дискретной точке  $x$  обычно равна нулю, оба определения совпадают.

В формуле (10)  $M$  – число экспериментов (реализаций), в которых  $\xi \leq x$ . Таким образом,  $M/N$  – относительная частота того, что случайная величина равна или меньше чем  $x$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  эта относительная частота называется вероятностью  $P(\xi \leq x)$  того, что случайная величина равна или меньше  $x$ . Из формулы (10) следует, что  $P(\xi \leq x)$  должна быть неубывающей функцией  $x$  с вероятностью  $P(\xi \leq \infty) = 1$ . Плотность вероятности  $W_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  – это производная от  $P$  по  $x$ :

$$W_\xi(x) = \frac{d}{dx} P(\xi \leq x) = \frac{d}{dx} \langle 1(x - \xi) \rangle = \langle \frac{d}{dx} 1(x - \xi) \rangle = \langle \delta(x - \xi) \rangle, \quad (11)$$

где  $\delta(x - \xi)$  – дельта-функция Дирака. Вероятность  $dP$  найти непрерывную случайную величину в интервале значений  $x \leq \xi \leq x + dx$  дается следующим выражением (предполагая, что  $P$  дифференцируемо):

$$P(\xi \leq x + dx) - P(\xi \leq x) = \frac{d}{dx} P(\xi \leq x) dx = W_\xi(x) dx.$$

Плотность вероятности (11) обычно плавная функция для непрерывных случайных величин.

Одномерные статистические свойства случайной величины  $\xi$  полностью определяются плотностью вероятности, т.к. любые средние могут быть получены из  $W_\xi(x)$  путем интегрирования. Это утверждение можно представить в следующем виде: вследствие свойства (4) проводя усреднение можно получить:

$$\langle f(\xi) \rangle = \langle \int f(x)\delta(x - \xi)dx \rangle = \int f(x) \langle \delta(x - \xi) \rangle dx = \int f(x)W_\xi(x)dx. \quad (12)$$

- Случайная величина была определена как  $\xi$ , где переменная функции распределения была обозначена как  $x$ . В дальнейшем для простоты будем опускать индекс  $\xi$  у вероятностей и плотностей вероятности.

#### IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если используем случайную величину

$$\eta = g(\xi)$$

вместо случайной величины  $\xi$ , плотность вероятности  $W_\eta(y)$  случайной величины  $\eta$  дана, в соответствии с (11),(8), следующим выражением:

$$W_\eta(y) = \langle \delta(y - \eta) \rangle = \langle \delta(y - g(\xi)) \rangle = \int \delta(y - g(x))W_\xi(x)dx. \quad (13)$$

Последний интеграл может быть легко вычислен. Если  $g_n(y)$  является  $n$ -ым простым корнем уравнения  $g(x) - y = 0$ , тогда, следуя свойству (6) дельта-функции, можно получить:

$$W_\eta(y) = \sum_n \frac{W_{xi}(g_n(y))}{|g'_x(x)|_{x=x_n=g_n(y)}}. \quad (14)$$

#### Домашнее задание.

Вычислить из одномерного распределения Максвелла

$$W(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

плотность вероятности энергии  $E = \frac{1}{2}mv^2 = g(v)$ .

#### V. СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС И ЕГО $n$ -МЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

*Определение:* Если для каждого момента времени  $t$   $\xi = \xi(t)$  представляет собой случайную величину, то  $\xi(t)$  называется случайным процессом. Случайные величины полностью определяются заданием области их значений и вероятностей принимать эти значения.

Одномерная (одномоментная) плотность вероятности  $W(x, t)$  случайного процесса является однопараметрическим набором случайных величин:

$$W(x, t)dx = P\{x \leq \xi(t) \leq x + dx\}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t)dx = 1.$$

Если известна одномерная плотность вероятности, то соответствующие средние величины могут быть легко найдены:

$$\langle f[\xi(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)W(x, t)dx.$$

Теперь рассмотрим случайный процесс  $\xi(t)$  в два различных момента времени:  $\xi(t_1)$  и  $\xi(t_2)$ . В этом случае их совокупность описывается двумерной плотностью вероятности  $W(x_1, t_1; x_2, t_2)$ . Вероятность

$$W(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2 = P \left\{ \begin{array}{l} (x_1 \leq \xi \leq x_1 + dx_1) \\ (x_2 \leq \xi \leq x_2 + dx_2) \end{array} \right\} \quad (15)$$

есть вероятность того, что реализация случайного процесса окажется в момент времени  $t_1$  внутри интервала  $(x_1, x_1 + dx_1)$  и в момент времени  $t_2$  внутри интервала  $(x_2, x_2 + dx_2)$ .

Далее по индукции можно ввести  $n$ -мерную плотность вероятности  $W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ . В пределе  $n \rightarrow \infty$  получим полное описание случайного процесса. Необходимо отметить, что с точки зрения строгой математики необходимо знать функционал плотности вероятности  $W[x(t)]$  для полного описания случайного процесса.

*Определение*

Случайные процессы, имеющие равные  $n$ -мерные плотности вероятности, называются эквивалентными.

*Основные свойства плотности вероятности*

1. Неотрицательность:  $W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \geq 0$ .
2. Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)dx_1 \dots dx_n = 1$ .
3. Симметричность:  $W(x_1, t_1; x_2, t_2) \equiv W(x_2, t_2; x_1, t_1)$ .
4. Согласованность:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)dx_{m+1} \dots dx_n = W(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m),$$

лишние параметры автоматически сокращаются.

## VI. УСЛОВНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Вы, наверное, помните одну из основных теорем теории вероятности об условной вероятности. То же самое свойство имеет место для  $n$ -мерных ( $n$ -моментных) плотностей вероятности. Рассмотрим, например, двумерную плотность вероятности  $W(x_1, t_1; x_2, t_2)$ . Эта плотность вероятности может быть представлена как произведение одномерной плотности вероятности  $W(x_1, t_1)$  и условной  $W(x_2, t_2|x_1, t_1)$ :

$$W(x_1, t_1; x_2, t_2) = W(x_1, t_1) \cdot W(x_2, t_2|x_1, t_1).$$

Таким образом, можно ввести условную плотность вероятности в виде:

$$W(x_2, t_2|x_1, t_1) = \frac{W(x_1, t_1; x_2, t_2)}{W(x_1, t_1)}. \quad (16)$$

Здесь  $x_2$  действительный аргумент и  $t_2, t_1, x_1$  – параметры условной плотности вероятности. Если умножить  $W(x_2, t_2|x_1, t_1)$  на  $dx_2$ , можно сказать что это вероятность случайного процесса

попасть внутрь интервала  $(x_2, x_2 + dx_2)$  в момент времени  $t_2$  при условии что в момент  $t_1$  случайный процесс находился в точке  $x_1$ :

$$W(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 = P \{x_2 \leq \xi(t_2) \leq x_2 + dx_2 | \xi(t_1) = x_1\}. \quad (17)$$

*Основные свойства условной плотности вероятности*

1. Неотрицательность:  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \geq 0$ .
2. Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{+\infty} W(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 = 1$ .
3. *Замечание.* Можно ввести плотность вероятности

$$W(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \frac{W(x_1, t_1; x_2, t_2)}{W(x_2, t_2)}, \quad t_2 > t_1, \quad (18)$$

но это свойство выполняется только для обратимых во времени процессов.

Используя условную плотность вероятности можно вычислить условные средние.

*Несколько замечаний о зависимости плотности вероятности  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  от разности времен  $t_2 - t_1$ .*

Значения случайных процессов являются независимыми, если  $W(x_1, t_1; x_2, t_2) = W(x_1, t_1) \cdot W(x_2, t_2)$ , или, эквивалентно, если  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1) = W(x_2, t_2)$ .

Для реальных случайных процессов, имеющих конечную память,  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \rightarrow W(x_2, t_2)$  при  $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$ .

Для реальных случайных процессов, имеющих непрерывные траектории  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \rightarrow \delta(x_2 - x_1)$  при  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ .

Аналогично, для условной плотности вероятности  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  могут быть введены  $n$ -мерные условные плотности вероятности:

$$W(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \frac{W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}{W(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1})}. \quad (19)$$

Таким образом, можно записать  $n$ -мерную плотность вероятности  $W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  как произведение одномерной плотности вероятности и условной плотности вероятности:

$$\begin{aligned} & W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \\ & = W(x_1, t_1) \cdot W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot W(x_3, t_3 | x_1, t_1; x_2, t_2) \cdot \dots \cdot W(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

---

[1] H. Kramers, Physica **7**, 284 (1940).

[2] P. Hanggi, P. Talkner and M. Borkovec, Rev. Mod. Phys., **62**, 251 (1990).

[3] A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, Adv. Chem. Phys. **121**, 357 (2002).

[4] H. Risken, The Fokker-Planck equation (Springer Verlag, Berlin, 1985).

[5] C.W. Gardiner, Textbook of Stochastic methods (Springer-Verlag, 1985).

[6] L.A. Pontryagin, A.A. Andronov and A.A. Vitt, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **3**, 165 (1933) [translated by J.B. Barbour and reproduced in "Noise in Nonlinear Dynamics 1989, edited by F. Moss and P.V.E. McClintock (Cambridge University Press, Cambridge) Vol. 1, p.329].

# Случайные процессы в нелинейных системах

## Лекция 2

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН ГСП 105,  
Нижний Новгород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

### I. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайные процессы могут различаться их условными плотностями вероятности.

*Абсолютно случайный процесс.*

*Определение.* Абсолютно случайным процессом является процесс, значения которого в различные моменты времени абсолютно статистически независимы:

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \prod_{i=1}^n W(x_i, t_i), \quad (1)$$

т.е. для полного описания абсолютно случайного процесса достаточно знать только одномерную плотность вероятности. Белый шум является примером абсолютно случайного процесса.

Если время отклика системы  $\tau_{sys}$  гораздо больше, чем характерный временной масштаб процесса  $\tau_p$  ( $\tau_{sys} \gg \tau_p$ ), тогда этот процесс может считаться абсолютно случайным процессом. Еще одно название абсолютно случайного процесса – "процесс без памяти":

$$W(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = W(x_n, t_n). \quad (2)$$

Далее по индукции можно ввести более сложные процессы.

*Марковские процессы.*

*Определение.* Процесс  $\xi(t)$  называется марковским, если для любых  $n$  последовательных моментов времени, таких, что  $t_1 < \dots < t < \dots < t_n$ ,  $n$ -мерная условная плотность вероятности зависит только от последнего фиксированного значения:

$$W(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = W(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (3)$$

Марковские процессы – это процессы без последствия:

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = W(x_1, t_1) \prod_{i=2}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}), \quad (4)$$

В следующих лекциях мы более детально рассмотрим свойства марковских процессов.

*Случайный процесс общего вида.*

Далее можно рассмотреть процессы, у которых условная плотность вероятности зависит только от значений случайной переменной в два последних момента времени. В этом случае полная информация о процессе содержится в плотности вероятности  $W(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3)$ . Мы можем продолжить и сконструировать процесс, полная информация о котором будет содержаться в плотности вероятности  $W(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; x_4, t_4)$  и т.д. В соответствии с работой Ванга и Уленбека [1], однако, такая классификация является слишком сложной для описания немарковских процессов, т.е. процессов, чья полная информация не содержится только в двумерной плотности вероятности  $W_2$ . Для описания немарковских процессов гораздо удобнее вместо одной переменной  $\xi(t) = \xi_1(t)$  принять в рассмотрение несколько переменных  $\xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ . Подходящим выбором этих дополнительных переменных можно записать марковский процесс для  $n$  случайных переменных. Другая возможность для конструирования новых

случайных процессов заключается в следующем. Как будет видно из материалов следующей лекции, уравнением для плотности вероятности непрерывного марковского процесса является уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова. Для немарковских процессов можно использовать обобщенное уравнение Фоккера-Планка [2], содержащее функцию памяти.

*Квази-детерминированные случайные процессы.*

Что такое детерминированный случайный процесс с точки зрения вероятностного описания?

Рассмотрим некоторую детерминированную функцию  $\xi(t) = s(t)$ , например,  $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . В этом случае одномерная плотность вероятности имеет следующий вид:  $W(x_1, t_1) = \delta(x_1 - s(t_1))$ , двумерная:  $W(x_1, t_1; x_2, t_2) = \delta(x_1 - s(t_1))\delta(x_2 - s(t_2))$ , и  $n$ -мерная:  $W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i - s(t_i))$ . Конечно, никто не описывает детерминированный процесс в таком виде, но подобный подход дает возможность описать квази-детерминированный случайный процесс.

*Определение.* Квази-детерминированный случайный процесс является процессом, реализации которого могут быть описаны некоторой функцией известной формы, содержащей один или несколько случайных параметров:  $\xi(t) = s(t, \lambda)$ ; здесь  $\lambda$  – случайная величина, описываемая плотностью вероятности  $W_\lambda(\lambda)$ .

Как найти  $n$ -мерную плотность вероятности  $W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ ? Условная плотность вероятности для известной  $\lambda$  имеет вид:

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | \lambda) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i - s(t_i, \lambda)).$$

Прежде всего запишем  $n + 1$ -мерную плотность вероятности:

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n; \lambda) = W_\lambda(\lambda) \cdot W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | \lambda).$$

Требуемая  $n$ -мерная плотность вероятности квази-детерминированного случайного процесса может быть получена путем интегрирования  $n + 1$ -мерной плотности вероятности:

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n; \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\lambda(\lambda) \prod_{i=1}^n \delta(x_i - s(t_i, \lambda)).$$

*Пример.* Рассмотрим процесс  $\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $\varphi$  – случайная фаза:

$$W_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \varphi \in [0, 2\pi], \\ 0, & \varphi \notin [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (5)$$

Ее одномерная плотность вероятности имеет вид:

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\varphi(\varphi) \delta[x - A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)] d\varphi.$$

## II. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности вероятности. Одномерная характеристическая функция имеет вид:

$$\Theta(u, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t) e^{jux} dx, \quad (6)$$

где  $j = \sqrt{-1}$ .

В  $n$ -мерном случае характеристическая функция может быть представлена в следующем виде:

$$\Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) e^{j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} dx_1 \dots dx_n \equiv \left\langle e^{j \sum_{i=1}^n u_i x_i} \right\rangle. \quad (7)$$

Если характеристическая функция известна, можно получить  $n$ -мерную плотность вероятности в виде обратного преобразования Фурье:

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) e^{-j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} du_1 \dots du_n. \quad (8)$$

*Основные свойства характеристической функции.*

1.  $\Theta(0, t_1; \dots; 0, t_n) = 1$ .
2.  $|\Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)| \leq |\Theta(0, t_1; \dots; 0, t_n)| = 1$ .
3.  $\Theta(-u_1, t_1; \dots; -u_n, t_n) = \Theta^*(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)$ .
4.  $\Theta(u_1, t_1; \dots; u_m, t_m) = \Theta(u_1, t_1; \dots; u_m, t_m; 0, t_{m+1}; \dots; 0, t_n)$ ,  $n > m$ .
5.  $\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) e^{-j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} du_1 \dots du_n \geq 0$ , для любых  $x$  – характеристическая функция является положительно определенной.

Для абсолютно случайного процесса:  $\Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = \prod_{i=1}^n \Theta(u_i, t_i)$ .

### III. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Простейшая моментная функция – это математическое ожидание (среднее значение):

$$\alpha_1(t) \equiv \langle \xi(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x W(x, t) dx.$$

Вторая моментная функция – это функция корреляции:

$$\alpha_2(t_1, t_2) \equiv K_\xi[t_1, t_2] \equiv \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 W(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (9)$$

И так далее, в общем случае  $n$ -ая моментная функция имеет вид:

$$\alpha_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_n) \rangle.$$

Очевидно, что для нахождения  $n$ -ой моментной функции необходимо знать  $n$ -мерную плотность вероятности.

*Связь между характеристической функцией и моментной функцией.*

Разложим характеристическую функцию  $\Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)$  в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) &= \Theta(0, t_1; \dots; 0, t_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_k} \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} u_k + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \frac{\partial^2 \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2}} \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} u_{k_1} u_{k_2} + \dots + \\ &+ \frac{1}{s!} \sum_{k_1, \dots, k_s=1}^n \frac{\partial^s \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_{k_1} \dots \partial u_{k_s}} \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} u_{k_1} u_{k_2} \dots u_{k_s} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Производная характеристической функции напрямую связана с соответствующей моментной функцией:

$$\frac{\partial \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_k} \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} = \int \dots \int W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \cdot j x_k e^{j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} dx_1 \dots dx_n \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} = j \langle \xi(t_k) \rangle. \quad (11)$$

$$\frac{\partial^s \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_{k_1} \dots \partial u_{k_s}} \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} = j^s \langle \xi(t_{k_1}) \dots \xi(t_{k_s}) \rangle = j^s \alpha_s(t_{k_1}, \dots, t_{k_s}). \quad (12)$$

Таким образом, характеристическая функция может быть представлена как разложение в ряд по моментам:

$$\Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{k_1, \dots, k_s=1}^n \alpha_s(t_{k_1}, \dots, t_{k_s}) u_{k_1} \dots u_{k_s}. \quad (13)$$

В этой формуле мы использовали первое свойство характеристической функции. Для получения характеристической функции необходимо знать  $n$ -мерные моментные функции всех порядков.

### *Центральные моментные функции.*

Для простоты, и вследствие достаточно узкого распространения центральных моментов, представим здесь только одномерные функции центральных моментов.

Центральные моменты определяются следующим образом:

$$\mu_n(t) \equiv \langle (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle)^n \rangle,$$

где  $\langle \xi(t) \rangle = \alpha_1(t) = m(t)$  – среднее значение.

Если  $\alpha_1(t) = 0$ , то  $\mu_n(t) = \alpha_n(t)$ .

$$\mu_1(t) \equiv \langle (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle) \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \mu_2(t) &\equiv \langle (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle)^2 \rangle \equiv \langle \xi(t)^2 - 2\xi(t) \langle \xi(t) \rangle + \langle \xi(t) \rangle^2 \rangle \equiv \\ &\equiv \langle \xi(t)^2 \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2 = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)^2 = D(t), \end{aligned}$$

т.е. второй центральный момент есть дисперсия.

Основные характеристики случайного процесса - это его среднее  $m(t)$  и дисперсия  $D(t)$ . Для нормально распределенных случайных величин среднее и дисперсия полностью определяют одномерную плотность вероятности случайного процесса. Если  $W(x, t)$  – гауссовское (нормальное) распределение, то:

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}} e^{-\frac{(x-m(t))^2}{2D(t)}}.$$

Таким образом, из двух предыдущих разделов можно заключить, что если все моменты известны, то они могут быть просуммированы в характеристическую функцию и обратно преобразованы по Фурье в плотность вероятности. В целом, это правильно, но, к сожалению, не применимо на практике. Почему? Ответ на этот вопрос следующий:

*Пример.* Рассмотрим детерминированный процесс. Его плотность вероятности имеет вид:  $W(x, t) = \delta(x - m(t))$ . Можно легко получить все моменты:  $\alpha_1(t) = m(t)$ ,  $\alpha_2(t) = m^2(t)$ , ...,  $\alpha_k(t) = m^k(t)$ ;  $\mu_1(t) = \mu_2(t) = \dots = \mu_k(t) = 0$ . Даже в этом простейшем случае необходимо учитывать все моменты для получения требуемой характеристической функции (плотности вероятности). Мы не можем остановить суммирование бесконечного ряда по моментам в формуле (13) и я не знаю примеров процессов, которые можно было бы описать конечным рядом по моментам. Но в реальных задачах результат суммирования ряда (13) неизвестен.

**Домашнее задание.** И все-таки, бесконечный ряд по моментам, упомянутый выше, может быть просуммирован. Пожалуйста, получите плотность вероятности детерминированного процесса используя свойства дельта-функции.

Представление характеристической функции через кумулянты (семиинварианты) [3] позволяет обойти проблему суммирования бесконечного ряда, поскольку существует по крайней мере один класс случайных процессов, который может быть описан всего двумя кумулянтами (гауссовский процесс) и в ряде практически важных случаев высшими кумулянтами можно пренебречь и бесконечный ряд может быть приближенно представлен в виде конечного ряда.

#### IV. КУМУЛЯНТНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Кумулянтные функции вводятся в следующем виде:

$$\ln \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) \equiv \ln \Theta(0, t_1; \dots; 0, t_n) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{k_1, \dots, k_s=1}^n \mathfrak{a}_s(t_{k_1}, \dots, t_{k_s}) u_{k_1} \dots u_{k_s}, \quad (14)$$

где  $\mathfrak{a}_s(t_{k_1}, \dots, t_{k_s})$  – кумулянтные функции  $s$ -го порядка (отметим, что первое слагаемое  $\ln \Theta(0, t_1; \dots; 0, t_n)$  этого ряда в (14) очевидно равно нулю).

$$\left. \frac{\partial^s \ln \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_{k_1} \dots \partial u_{k_s}} \right|_{u_1, \dots, u_n=0} = j^s \mathfrak{a}_s(t_{k_1}, \dots, t_{k_s}).$$

Характеристическая функция может быть представлена в виде ряда по кумулянтам в следующем виде:

$$\Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) \equiv \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{k_1, \dots, k_s=1}^n \mathfrak{a}_s(t_{k_1}, \dots, t_{k_s}) u_{k_1} \dots u_{k_s} \right\}. \quad (15)$$

Это представление существенно более удобно чем аналогичное представление в виде ряда по моментам.

*Связь между кумулянтными и моментными функциями*

$$\varkappa_1(t_k) = \frac{1}{j} \frac{\partial \ln \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_k} \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} = \frac{1}{j} \left\{ \frac{1}{\Theta(\dots)} \frac{\partial \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_k} \right\}_{u_1, \dots, u_n=0} = \alpha_1(t_k),$$

Таким образом, первая кумулянтная функция полностью совпадает с первой моментной функцией  $\varkappa_1(t_k) = \alpha_1(t_k)$ , поскольку  $\Theta(\dots) = 1$  когда ее аргумент равен нулю  $u_1 = \dots = u_n = 0$ .

$$\begin{aligned} \varkappa_2(t_{k_1}, t_{k_2}) &= \frac{1}{j^2} \frac{\partial^2 \ln \Theta(u_1, t_1; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2}} \Big|_{u_1, \dots, u_n=0} = \\ &= \frac{1}{j^2} \left\{ -\frac{1}{\Theta^2(\dots)} \frac{\partial \Theta(\dots)}{\partial u_{k_1}} \frac{\partial \Theta(\dots)}{\partial u_{k_2}} + \frac{1}{\Theta(\dots)} \frac{\partial^2 \Theta(\dots)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2}} \right\}_{u_1, \dots, u_n=0} = \alpha_2(t_{k_1}, t_{k_2}) - \alpha_1(t_{k_1})\alpha_1(t_{k_2}). \end{aligned}$$

Вторую кумулянтную функцию

$$\varkappa_2(t_{k_1}, t_{k_2}) = \alpha_2(t_{k_1}, t_{k_2}) - \alpha_1(t_{k_1})\alpha_1(t_{k_2}) \equiv B_\xi[t_{k_1}, t_{k_2}] \quad (16)$$

называют функцией ковариации. Функция ковариации в совпадающие моменты времени есть ни что иное как дисперсия:  $B_\xi[t, t] = \langle \xi^2(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2 \equiv D(t) \equiv \sigma_\xi^2(t)$ , где  $\sigma_\xi(t)$  – средне-квадратическое отклонение.

Если  $B_\xi[t_1, t_2] = 0$  для любых моментов времени, то такой процесс называют некоррелированным. В этом случае функция корреляции равна произведению средних:  $K_\xi[t_1, t_2] = \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle$ .

В литературе часто используют нормированную функцию ковариации:

$$R_\xi[t_1, t_2] \equiv \frac{B_\xi[t_1, t_2]}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)} \equiv \frac{B_\xi[t_1, t_2]}{\sqrt{B_\xi[t_1, t_1]B_\xi[t_2, t_2]}}.$$

Далее (для простоты только в одномерном случае) приведем соотношения, связывающие кумулянтные и моментные функции.

Представление первых шести кумулянтов через моменты имеет вид:

$$\varkappa_1 = \alpha_1 = m,$$

$$\varkappa_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = D,$$

$$\varkappa_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,$$

$$\varkappa_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4,$$

$$\varkappa_5 = \alpha_5 - 5\alpha_1\alpha_4 - 10\alpha_2\alpha_3 + 20\alpha_1^2\alpha_3 + 30\alpha_1\alpha_2^2 - 60\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^5,$$

$$\varkappa_6 = \alpha_6 - 6\alpha_1\alpha_5 - 15\alpha_2\alpha_4 + 30\alpha_1^2\alpha_4 - 10\alpha_3^2 + 120\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 120\alpha_1^3\alpha_3 + 30\alpha_2^3 - 270\alpha_1^2\alpha_2^2 + 360\alpha_1^4\alpha_2 - 120\alpha_1^6.$$

Также можно привести представление моментов через кумулянты:

$$\alpha_1 = \varkappa_1,$$

$$\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1^2,$$

$$\alpha_3 = \alpha_3 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3,$$

$$\alpha_4 = \alpha_4 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^4,$$

$$\alpha_5 = \alpha_5 + 5\alpha_1\alpha_4 + 10\alpha_2\alpha_3 + 10\alpha_1^2\alpha_3 + 10\alpha_1^3\alpha_2 + 15\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^5,$$

$$\alpha_6 = \alpha_6 + 6\alpha_1\alpha_5 + 15\alpha_2\alpha_4 + 15\alpha_1^2\alpha_4 + 10\alpha_3^2 + 60\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 20\alpha_1^3\alpha_3 + 15\alpha_2^3 + 45\alpha_1^2\alpha_2^2 + 15\alpha_1^4\alpha_2 + \alpha_1^6.$$

Таким образом, очевидно, что первые два кумулянта (одномерные кумулянтные функции) имеют четкий смысл: первый кумулянт – это матожидание, а второй кумулянт – дисперсия. Для гауссовских распределений высшие кумулянты равны нулю. Также, четкую и понятную интерпретацию можно дать третьему и четвертому кумулянтам. Третий кумулянт  $\alpha_3$  называется "асимметрией" распределения. Асимметрия отлична от нуля только для плотностей вероятности, асимметричных относительно среднего  $\alpha_1$ . Четвертый кумулянт  $\alpha_4$  называется эксцессом. Эксцесс распределения описывает отклонение распределения от гауссова. Если форма распределения более острая, то  $\alpha_4 > 0$ , если более плоская, то  $\alpha_4 < 0$ , однако, это не всегда справедливо, возможны экзотические распределения, см. [3].

#### *Квазиомоменты и ряд Эджворта.*

Важно отметить, что кумулянты  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$  описывают степень отклонения распределения от гауссова. Это дает возможность количественно оценить эти отклонения и записать произвольное распределение как ряд гауссова распределения и его производных.

Рассмотрим произвольное распределение  $W(x)$ , имеющее в общем случае все кумулянты. Его характеристическая функция (15) может быть представлена в следующем виде:

$$\Theta(u) = \exp\left(jmu - \frac{D}{2}u^2\right) \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} \beta_k\right]. \quad (17)$$

где

$$\left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} \beta_k\right] \equiv \exp\left[\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} \alpha_k\right].$$

Сравнивая это равенство с представлением характеристической функции через моменты (13) и через кумулянты (15) (ограничиваясь одномерным случаем), легко видеть, что коэффициенты  $\beta_k$  представляют собой ни что иное как моменты  $\alpha_k$ , вычисленные при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Таким образом, получаем:

$$\beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_4, \beta_5 = \alpha_5, \beta_6 = \alpha_6 + 10\alpha_3^2, \dots$$

и т.д..

Эти коэффициенты называются "квазиомоменты" распределения. Они отличны от нуля только для негауссовских распределений.

Выполняя преобразование Фурье формулы (17), получим:

$$W(x) = W_G(x) + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k}{k!} W_G^{(k)}(x),$$

где  $W_G^{(k)}(x)$  – производная гауссовского распределения  $k$ -го порядка. Полученное разложение называется рядом Эджворта. Оно является разложением произвольной плотности вероятности по производным гауссова распределения. В случае, когда высшие кумулянты достаточно малы, могут быть учтены только первые четыре слагаемых разложения:

$$W(x) = W_G(x) - \frac{\varkappa_3}{3!}W_G^{(3)}(x) + \frac{\varkappa_4}{4!}W_G^{(4)}(x) - \frac{\varkappa_5}{5!}W_G^{(5)}(x) + \frac{\varkappa_6 + \varkappa_3^2}{6!}W_G^{(6)}(x).$$

Из этой формулы видна особая важность кумулянтов  $\varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5, \varkappa_6$  для оценки отклонения плотности вероятности от гауссова распределения.

- Необходимо отметить, что ряд Эджворта дает корректные результаты для распределений, близких к гауссову, и в некоторых случаях неадекватное использование ряда Эджворта может привести к плотностям вероятности существенно отличающихся от реальных, или даже к отрицательным плотностям вероятности.

### *Стационарные и эргодические случайные процессы.*

*Определение.* Случайный процесс называется стационарным, если все многомерные законы распределения зависят только от взаимного расположения моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , но не от самих значений этих величин. Другими словами, случайный процесс называется стационарным, если его вероятностные закономерности неизменны во времени. В противном случае, он называется нестационарным.

*Определение.* Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия постоянны, а функция корреляции зависит только от разности моментов времени.

*Определение.* Если при определении моментных функций стационарного случайного процесса операцию усреднения по статистическому ансамблю можно заменить усреднением по времени, то такой стационарный случайный процесс называется эргодическим.

---

[1] M.C.Wang and G.E.Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys., v. 17, p.323 (1945).

[2] H.Risken, The Fokker-Planck equation (Springer Verlag, Berlin, 1985).

[3] А.Н.Малахов, Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований (Советское радио, Москва, 1978).

# Случайные процессы в нелинейных системах

## Лекция 3

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН ГСП 105,  
Нижний Новгород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

### I. НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Если мы рассмотрим произвольный случайный процесс, тогда для такого процесса условная плотность вероятности  $W(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1})$  будет зависеть от  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . Это приводит к определенной временной сложности такого процесса, к существованию сильного последействия, и в итоге, к более точному описанию особенностей реальных гладких процессов. Однако, математический анализ таких процессов становится невероятно сложным, вплоть до невозможности их глубокого и детального анализа. По этой причине, представляют интерес некоторые "компромиссные" модели, которые просты в анализе и в то же время корректно и удовлетворительно описывают реальные процессы. Именно такими процессами, имеющими широкое распространение и признание, являются марковские процессы.

Рассмотрим непрерывный марковский процесс. Непрерывный процесс характеризуется тем обстоятельством, что в течение любого малого периода времени  $\Delta t$  происходит некоторая малая (порядка  $\sqrt{\Delta t}$ ) вариация состояния.

Определим непрерывный марковский процесс  $x(t)$ . Возьмем в некоторые последовательные моменты времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  значения случайного процесса  $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_n = x(t_n)$ .

*Определение.* Процесс  $x(t)$  является марковским, если для любых последовательных  $n$  моментов времени  $t_1 < \dots < t < \dots < t_n$   $n$ -мерная плотность вероятности зависит только от последнего фиксированного значения:

$$W(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = W(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (1)$$

Марковский процесс – это процесс без последействия, таким образом, формула (20) первой лекции может быть записана в следующем виде:

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = W(x_1, t_1) \prod_{i=2}^n W(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}). \quad (2)$$

Формула (2) содержит только одномерную плотность вероятности  $W(x_1, t_1)$  и условную плотность вероятности.

Термин "вероятность перехода" имеет прямое отношение к марковским процессам. Этот термин был введен в физику без всякой связи с математической теорией случайных процессов. "Вероятность перехода" относится к таким физическим системам, чьи состояния в текущий момент времени полностью определяют их дальнейшую эволюцию. "Вероятность перехода" является, фактически, вероятностью перехода системы из состояния  $x_1$ , существующего в момент времени  $t_1$  в состояние  $x_2$  в момент времени  $t_2$ . Однако, не для каждой системы, подверженной случайным переходам, возможно ввести понятие "вероятности перехода". Здесь является важной независимость вероятности следующего перехода от предыстории состояний системы. Таким образом, термин "вероятность перехода" существует только для систем, чье текущее состояние полностью определяет вероятность следующего перехода.

Поскольку для марковского процесса формула (1) выполняется, то ясно, что плотность вероятности в правой части выражения ни что иное как плотность вероятности перехода из состояния  $x_{n-1}$  в состояние  $x_n$  в течение времени от  $t_{n-1}$  до  $t_n$ .

Характерным свойством марковского процесса является то, что исходная одномерная плотность вероятности и плотность вероятности перехода полностью определяют марковский случайный процесс.

Плотность вероятности перехода удовлетворяет следующим условиям:

1. Плотность вероятности перехода является неотрицательной и нормированной:

$$W(x, t|x_0, t_0) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t|x_0, t_0) dx = 1.$$

2. Плотность вероятности перехода переходит в дельта-функцию в совпадающие моменты времени (физически это означает малые изменения состояния за малые периоды времени):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} W(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0).$$

3. Плотность вероятности перехода удовлетворяет уравнению Смолуховского:

Допустим, мы имеем следующие начальные условия, в момент времени  $t_0$  система находится в состоянии  $x(t_0) = x_0$ . Требуется найти вероятность обнаружить реализацию случайного процесса в момент времени  $t_1$  в интервале значений  $(x_1, x_1 + dx_1)$  и в момент времени  $t_2$  в интервале значений  $(x_2, x_2 + dx_2)$ . Напомним, что  $P\{x_2 < x(t_2) < x_2 + dx_2 | x(t_0) = x_0\} = W(x_2, t_2|x_0, t_0) dx_2$ . Следуя условию что процесс  $x(t)$  является марковским, имеем, что  $W(x_1, t_1|x_0, t_0) dx_1$  и  $W(x_2, t_2|x_1, t_1) dx_2$  – являются статистически независимыми. Тогда для плотности вероятности перехода справедливо уравнение Смолуховского (в западной литературе уравнение Чепмена-Колмогорова):

$$W(x_2, t_2|x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_2, t_2|x_1, t_1) W(x_1, t_1|x_0, t_0) dx_1. \quad (3)$$

Можно легко проверить корректность этого уравнения. На основании (2) можно записать:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_3(x_2, t_2; x_1, t_1; x_0, t_0) dx_1 = W(x_0, t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_2, t_2|x_1, t_1) W(x_1, t_1|x_0, t_0) dx_1.$$

В силу условия согласованности плотности вероятности (см. лекцию 1) интеграл слева равен двумерной плотности вероятности, которую можно выразить из плотности вероятности перехода в следующем виде:

$$W_2(x_2, t_2; x_0, t_0) = W(x_0, t_0) W(x_2, t_2|x_0, t_0).$$

Приравнивая правые части этих равенств получим уравнение Смолуховского (3).

Если известна исходная плотность вероятности  $W(x_0, t_0)$  и каким-то образом удалось найти плотность вероятности перехода  $W(x, t|x_0, t_0)$ , можно легко получить одномерную плотность вероятности в произвольный момент времени:

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_0, t_0) W(x, t|x_0, t_0) dx_0. \quad (4)$$

Какое уравнение может описывать марковский процесс? Теперь мы знаем все свойства марковских процессов и можем догадаться, что марковский процесс должен быть описан дифференциальным уравнением первого порядка, поскольку только ОДУ первого порядка однозначно определяется своим начальным значением. Марковский процесс – это процесс случайный, значит, уравнение, описывающее этот процесс, должно содержать шумовой источник. Какие свойства должен иметь этот шумовой источник? Это может быть только абсолютно случайный ( $\delta$ -коррелированный) процесс, поскольку только для таких процессов в прошедшие моменты времени условная плотность вероятности будет неизменна в последующие моменты времени.

## II. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ СИЛ И УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА

В наиболее общем случае броуновское движение в поле сил описывается простым динамическим уравнением с шумовым источником:

$$\frac{m}{h} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{h dx} + \xi(t). \quad (5)$$

где  $\xi(t)$  может трактоваться как белый гауссовский шум (ланжевенская сила),  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D(x,t)\delta(\tau)$ ,  $\Phi(x)$  – потенциальный профиль,  $m$  – масса броуновской частицы и  $h$  – вязкость. Но это уравнение второго порядка, которое описывает не марковский процесс, а совокупность двух марковских процессов:  $x(t)$  и  $dx(t)/dt$ . Ограничивая данный курс лекций рассмотрением, в основном, марковских процессов, будем в дальнейшем для краткости называть уравнением Ланжевена предельный случай приведенного выше уравнения (при  $m/h \rightarrow 0$ ), что в своей физической интерпретации соответствует броуновскому движению с большим затуханием:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{h dx} + \xi(t), \quad (6)$$

Часто, вместо потенциала, говорят о коэффициенте сноса  $a(x) = -\frac{d\Phi(x)}{h dx}$ . Если коэффициент диффузии  $D(x,t)$  не зависит от  $x$ , тогда уравнение (6) называется уравнением Ланжевена с аддитивным шумом. В случае, если  $D(x,t)$  зависит от координаты  $x$ , говорят об уравнении Ланжевена с мультипликативным шумом. Это различие между аддитивным и мультипликативным шумовыми источниками не является очень существенным, поскольку в одномерном случае (6), для независимых от времени коэффициентов сноса и диффузии и для  $D(x,t) \neq 0$ , мультипликативный шум можно сделать аддитивным путем замены переменных [4].

Уравнение (6) – стохастическое дифференциальное уравнение. Некоторые требуемые характеристики стохастических процессов могут быть получены напрямую из этого уравнения, используя либо методы кумулянтного анализа [5], либо другие методы, представленные в книге [3]. Рассмотрим некоторые методы численного решения уравнения Ланжевена.

## III. СТОХАСТИЧЕСКИЙ КАЛКУЛУС

Пусть поведение некоторой системы описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,t) + g(x,t)\xi(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (7)$$

где  $f(x,t)$  и  $g(x,t)$  – детерминированные функции своих аргументов, удовлетворяющих условию Липшица:

$$|f(x,t) - f(y,t)| + |g(x,t) - g(y,t)| \leq L|x - y|, \quad L = \text{const} > 0,$$

$\xi(t)$  – белый гауссовский шум с известными статистическими характеристиками

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D_0\delta(\tau).$$

Рассматривая белые шумы, необходимо иметь в виду их специфику, нередко приводящую к существенным особенностям. Белый шум есть удобная математическая идеализация, он недифференцируем и имеет бесконечную дисперсию. Поэтому уравнения типа (22), в которые входят белые шумы, выведены в особый класс и называются стохастическими дифференциальными уравнениями. Кроме записи (22) можно указать еще две эквивалентные формы записи:

$$dx(t) = f(x, t)dt + g(x, t)dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (8)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x, t)dt + \int_{t_0}^t g(x, t)dw(t). \quad (9)$$

Здесь  $dw(t)$  – винеровский процесс. Так как винеровский процесс недифференцируем (его производная по времени имеет бесконечную дисперсию), то выражение

$$\int_{t_0}^t g(x, t)dw(t) \quad (10)$$

нельзя трактовать ни как обычный интеграл Коши-Римана, ни как интеграл Лебега-Стилтьеса. Чтобы стохастические уравнения (22),(8),(9) имели смысл, необходимо определить, что понимается под выражением (10).

По определению, стохастическими интегралами называются выражения типа

$$\int_{t_0}^t \zeta(w(t), t)dw(t), \quad (11)$$

$$\int_{t_0}^t \zeta(x(t), t)dx(t), \quad (12)$$

$$\int_{t_0}^t \zeta(x(t), t)dw(t). \quad (13)$$

Здесь  $\zeta$  – непрерывно дифференцируемая детерминированная функция своих аргументов,  $x(t)$  – диффузионный марковский процесс с коэффициентами сноса  $a(x, t)$  и диффузии  $D(x, t)$ , непрерывными по обоим аргументам.

Строгая математическая теория стохастических интегралов и дифференциальных уравнений впервые была дана японским математиком К. Ито [1]. В случае (11) стохастическим интегралом в смысле Ито называется предел сходящихся в среднем квадратичном интегральных сумм вида:

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta(w(t), t)[w(t_{i+1}) - w(t_i)] = \int_{t_0}^t \zeta(w(t), t)d^*w(t). \quad (14)$$

Здесь и далее стохастические интегралы и дифференциалы, понимаемые в смысле Ито, обозначаются звездочкой при дифференциале  $d^*w(t)$ , белом шуме  $\xi^*(t)$  и т.д. Последовательность

случайных величин  $\xi_n$  сходится к случайной величине  $\xi$  в среднем квадратичном  $\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$ , если выполняется условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\xi_n - \xi)^2 \rangle = 0$ .

Интегральная сумма в (14) строится следующим образом. Отрезок интегрирования  $[t_0, t]$  разбивается на  $n$  элементарных подинтервалов, и значение функции  $\zeta$  берется на левом конце каждого подинтервала. Если функция  $\zeta$  интегрируема с квадратом, то предел в (14) существует и определение является корректным.

Аналогично определяются в смысле Ито стохастические интегралы (12) и (13):

$$\int_{t_0}^t \zeta(x(t), t) d^* x(t) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta(x(t_i), t_i) [x(t_{i+1}) - x(t_i)]. \quad (15)$$

$$\int_{t_0}^t \zeta(x(t), t) d^* w(t) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta(x(t_i), t_i) [w(t_{i+1}) - w(t_i)]. \quad (16)$$

Пусть процесс  $x(t)$  имеет стохастический дифференциал, понимаемый в смысле Ито, т.е.

$$dx(t) = f(x, t)dt + g(x, t)d^* w(t). \quad (17)$$

Пусть функция  $F(x, t)$  непрерывна и имеет непрерывные производные  $F'_t(x, t)$ ,  $F'_x(x, t)$ ,  $F''_x(x, t)$ . Тогда процесс  $F(x(t), t)$  также имеет стохастический дифференциал:

$$dF(x(t), t) = \left[ F'_t(x, t) + F'_x(x, t)f(x, t) + \frac{D_0}{2} F''_x(x, t)g^2(x, t) \right] dt + F'_x(x, t)g(x, t)d^* w(t). \quad (18)$$

Формула (18), полученная К. Ито, называется формулой Ито. Ее также называют формулой замены переменных в стохастическом интеграле Ито (стохастические дифференциалы, по определению, – сокращенное выражение некоторых интегральных соотношений). Заметим, что для обычных гладких функций  $\sigma(t)$  третий член в квадратных скобках формулы (18) отсутствует. Поэтому интегралы в смысле Ито нельзя при замене переменных преобразовывать по обычным правилам, пригодным для гладких функций, нельзя просто интегрировать по частям и т.п.

Стохастический интеграл Ито, определяемый для прямого времени, не совпадает с таким же интегралом, определенным для обратного времени. Р.Л. Стратоновичем было обосновано определение стохастического интеграла в симметризованной форме [2], которое характеризуется определенной симметрией по отношению к прошлому и будущему.

Симметризованным стохастическим интегралом типа (11) называется предел сходящихся в среднем квадратичных интегральных форм вида:

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta \left( \frac{w(t_{i+1}) + w(t_i)}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) [w(t_{i+1}) - w(t_i)] = \int_{t_0}^t \zeta(w(t), t) dw(t). \quad (19)$$

В отличие от интеграла Ито, здесь при формировании интегральных сумм берутся значения функции  $\zeta$  в середине элементарных подинтервалов. Одним из важнейших свойств симметризованных стохастических интегралов является то, что с ними можно обращаться по обычным правилам, как если бы диффузионные процессы были гладкими функциями, поэтому для симметризованных интегралов используются обычные обозначения.

#### IV. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА

Запишем уравнение Ланжевена в следующей общей форме:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) + g(x)\xi(t), \quad (20)$$

где  $\xi(t)$  считаем белым гауссовым шумом:  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s)$ . Обозначим шаг интегрирования как  $h$  и будем использовать калкулус Стратоновича. Первое, что приходит в голову, это использование разложения в ряд Тейлора около точки  $t=0$  для решения уравнения (20). Формальное интегрирование приводит к виду (схема Эйлера):

$$x(h) - x(0) = \int_0^h [f(x(t)) + g(x(t))\xi(t)] dt. \quad (21)$$

Определим  $f_0 = f(x(0))$ ,  $g'_0 = \left. \frac{\partial g(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x=x(0)}$ . Под разложением в ряд Тейлора мы понимаем, что функции разложены в ряд в следующем виде:  $f_t = f_0 + (x(t) - x(0))f'_0 + \dots$ . На первый взгляд кажется, что

$$x(h) - x(0) = \int_0^h [f_0 + g_0\xi(t)] dt = hf_0 + g_0 \int_0^h \xi(t) dt. \quad (22)$$

Однако, можно показать, что это не является корректным порядком малости. Рассмотрим, что такое стохастический интеграл в правой части уравнения:

$$Z_1(h) = \int_0^h \xi(t) dt, \quad (23)$$

являющийся интегралом в интервале от 0 до  $h$  стохастического процесса  $\xi(t)$ . Этот интеграл также стохастическая переменная, и интегрирование подразумевает добавление некоторой гауссовой величины. Таким образом,  $Z_1(h)$  является гауссовой величиной. Это подразумевает, что плотность вероятности  $Z_1(h)$  определена, если известны ее среднее и дисперсия. Таким образом, простой численный интегратор представляет из себя следующую процедуру на каждом временном шаге:

- сгенерировать случайную гауссовскую величину с подходящим средним и дисперсией для моделирования стохастического интеграла;
- подставить эту случайную гауссовскую величину в правую часть уравнения (22) вместо стохастического интеграла;
- произвести интегрирование уравнения, используя стандартную численную схему для решения детерминированных дифференциальных уравнений.

Как нам быть со стохастическим интегралом  $Z_1(h)$ ? Нам нужно знать его среднее и дисперсию:

$$\langle Z_1(h) \rangle = \int_0^h \langle \xi(t) \rangle dt = 0, \quad (24)$$

$$\langle Z_1^2(h) \rangle = \int_0^h \int_0^h \langle \xi(t)\xi(s) \rangle dt ds = \int_0^h \int_0^h \delta(t-s) dt ds = \int_0^h dt = h. \quad (25)$$

Если ввести стохастическую гауссову переменную с нулевым средним и дисперсией, равной единице,  $Y_1$ , то можно  $Z_1(h)$  представить в следующем виде:

$$Z_1(h) = \sqrt{h}Y_1,$$

предполагая при этом, что  $Z_1(h)$  имеет корректные статистические свойства. Тогда можно переписать уравнение (22) в следующем виде:

$$x(h) - x(0) = hf_0 + g_0Z_1(h) = hf_0 + \sqrt{h}g_0Y_1. \quad (26)$$

Здесь возникает очевидная проблема: в правой части уравнения первое слагаемое имеет порядок  $h$ , в то время как второе слагаемое имеет порядок  $\sqrt{h}$ . Фактически, мы должны взять еще одно слагаемое в разложении Тейлора, так что корректный алгоритм первого порядка малости будет иметь вид:

$$x(h) - x(0) = hf_0 + g_0Z_1(h) + \frac{1}{2}g_0'g_0Z_1(h)^2. \quad (27)$$

Таким образом, в нашей численной схеме кроме детерминированного дрейфа  $f_0$  возникает т.н. индуцированный шумом дрейф  $g_0'g_0$ .

**Схема Хюна:**

$$x_1 = x(0) + g_0Z_1(h) + hf_0, \quad (28)$$

$$x(h) = x(0) + g_0Z_1(h) + 0.5h[f_0 + f(x_1)]. \quad (29)$$

Преимущества схемы Хюна по сравнению со схемой Эйлера - это второй порядок малости по детерминированной части и первый порядок по стохастической части, а также сходимость схемы к стационарному вероятностному распределению на больших временах.

## V. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГОРОВА

Наиболее мощные методы для получения различных характеристик стохастических процессов связаны с использованием уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности переходов.

Плотность вероятности переходов непрерывного марковского процесса удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial W(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [-a(x, t)W(x, t|x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x, t)W(x, t|x_0, t_0)] \right\} \quad (30)$$

$$\frac{-\partial W(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} = \left\{ a(x_0, t_0) \frac{\partial}{\partial x_0} W(x, t|x_0, t_0) + \frac{1}{2} D(x_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} W(x, t|x_0, t_0) \right\} \quad (31)$$

Уравнение (30) называется уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (УФПК) или прямым уравнением Колмогорова, поскольку оно содержит производные по финальному моменту времени  $t > t_0$ . В западной литературе это уравнение также известно как уравнение Смолуховского. Второе уравнение (31) называется обратным уравнением Колмогорова, поскольку оно

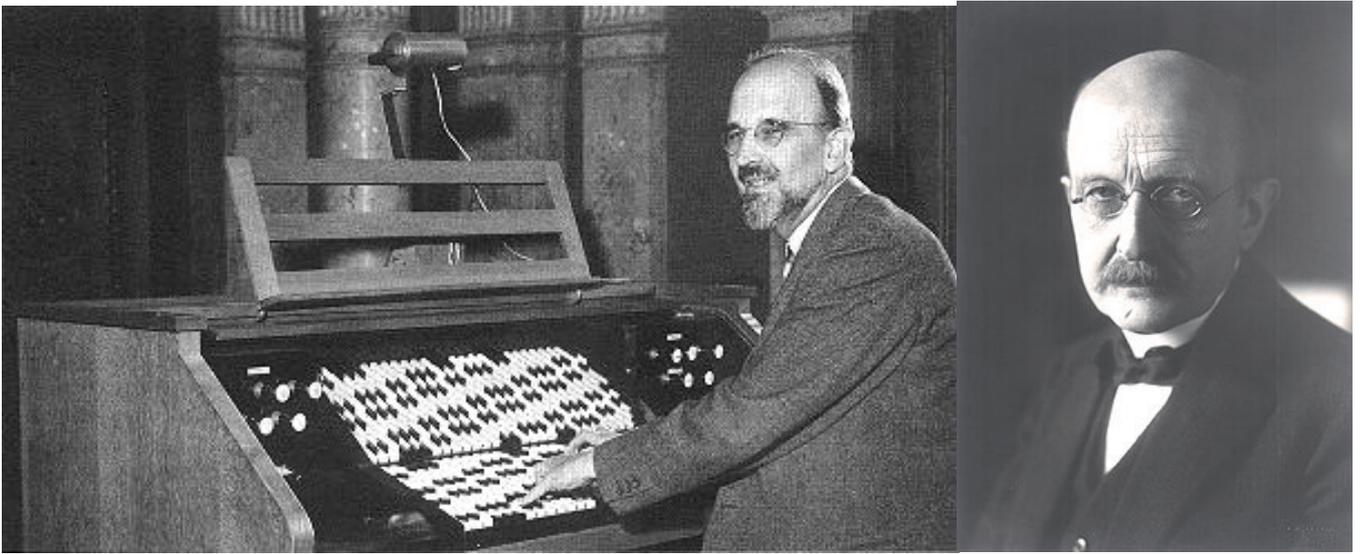


Рис. 1: Адриан Фоккер и Макс Планк.

содержит производные по начальному моменту времени  $t_0 < t$ . Эти названия связаны с тем, что первым это уравнение использовали Фоккер (1914) и Планк (1917) для описания броуновского движения, но Колмогорову первому удалось получить строгий математический вывод этого уравнения (30), а также он первый получил уравнение (31).

Давайте получим уравнения (30) и (31), предполагая, что все операции, которые мы будем использовать (существование пределов, производных, интегралов, и т.д.) справедливы.

Для получения прямого уравнения Колмогорова (30) мы должны в уравнении Смолуховского (3) взять промежуточный момент времени  $t'$ , близкий к конечному моменту  $t$ , а для получения обратного уравнения Колмогорова (31) – близкий к начальному моменту  $t_0$ . Поскольку все математические выкладки идентичны в обоих случаях, рассмотрим только процедуру получения прямого уравнения Колмогорова.

Запишем уравнение Смолуховского (3) в следующем виде:

$$W(x, t + \Delta t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t + \Delta t | x', t) W(x', t | x_0, t_0) dx', \quad t + \Delta t > t > t_0, \quad (32)$$

где временной интервал  $\Delta t$  будем считать малым.

Введем в рассмотрение условную характеристическую функцию  $\Theta(\Omega, t + \Delta t | x', t)$  случайных приращений  $(x - x')$  в течение малого интервала времени  $\Delta t$  при условии, что  $x'$  – фиксировано. Из определения характеристической функции получим:

$$\Theta(\Omega, t + \Delta t | x', t) = \langle \exp\{j\Omega(x - x')\} | x', t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{j\Omega(x - x')\} W(x, t + \Delta t | x', t) dx.$$

Проводя обратное преобразование Фурье можно записать:

$$W(x, t + \Delta t | x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-j\Omega(x - x')\} \Theta(\Omega, t + \Delta t | x', t) d\Omega. \quad (33)$$

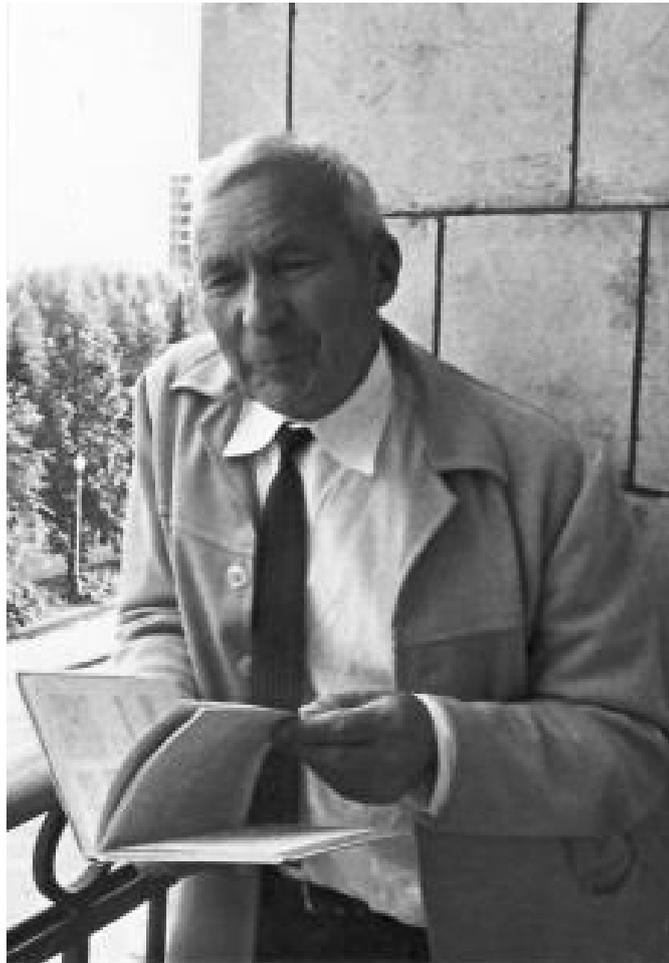


Рис. 2: Андрей Николаевич Колмогоров.

Разлагая условную характеристическую функцию в ряд Тейлора, получим:

$$\Theta(\Omega, t + \Delta t | x', t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(x', t)}{n!} (j\Omega)^n, \quad (34)$$

где  $m_n(x', t) = \langle \{x(t + \Delta t) - x'(t)\}^n | x'(t) \rangle$  – условные моменты приращения  $x - x'$  в течение времени  $\Delta t$

$$m_n(x', t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x')^n W(x, t + \Delta t | x', t) dx.$$

Если подставить формулу (34) в формулу (33) и провести некоторые преобразования, можно получить:

$$W(x, t + \Delta t | x', t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m_n(x', t)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x' - x). \quad (35)$$

Подставляя это выражение в уравнение Смолуховского (3) и выполняя интегрирование с дельта-функцией, получим:

$$W(x, t + \Delta t | x_0, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (m_n(x, t) W(x, t | x_0, t_0)). \quad (36)$$

или же

$$W(x, t + \Delta t | x_0, t_0) - W(x, t | x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (m_n(x, t) W(x, t | x_0, t_0)). \quad (37)$$

Деля обе части этого дифференциального уравнения на  $\Delta t$  и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t | x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (K_n(x, t) W(x, t | x_0, t_0)), \quad (38)$$

где

$$K_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x(t + \Delta t) - x(t))^n W(x, t + \Delta t | x, t) dx. \quad (39)$$

Необходимо отметить, что уравнение (38), которое было получено используя формулу полной вероятности, справедливо для произвольного случайного процесса, для которого существуют коэффициенты  $K_n(x, t)$ .

Рассмотрим теперь один частный, но важный случай полученного уравнения (38), когда первые два коэффициента не равны нулю, но другие коэффициенты  $K_n(x, t)$  для  $n \geq 3$  обращаются в ноль:

$$K_n(x, t) \neq 0, \quad n = 1, 2; \quad K_n(x, t) = 0, \quad n \geq 3. \quad (40)$$

Марковские процессы, удовлетворяющие этим условиям, называются диффузионными процессами.

Как следует из (39), условие (40) характеризует скорость уменьшения вероятности с уменьшением  $\Delta t$ . В целом, возможны быстрые изменения процесса  $x(t)$ , но в противоположных направлениях. Вот почему в среднем приращение процесса в течение малого интервала времени  $\Delta t$  порядка  $\sqrt{\Delta t}$ . Таким образом, выполнение условия (40) достаточно для непрерывных случайных процессов  $x(t)$ , чтобы быть марковскими диффузионными процессами.

Таким образом, для диффузионных марковских процессов уравнение (38) упрощается и переходит в уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова. Соответственно, коэффициенты сноса и диффузии имеют вид:  $a(x, t) = K_1(x, t)$ ,  $D(x, t) = K_2(x, t)$ .

Оба уравнения в частных производных (30) и (31) являются линейными параболического типа. Решение этих уравнений должно быть неотрицательным и нормировано к единице. Кроме того, это решение должно удовлетворять начальным условиям:

$$W(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \quad (41)$$

Рассмотрим более внимательно уравнение (30), поскольку оно гораздо более широко используется чем (31), и обсудим граничные условия и методы решения этого уравнения.

Решение уравнения (30) для бесконечного пространственного интервала и при дельта-образном начальном распределении называется фундаментальным решением задачи Коши. Если начальное значение марковского процесса не фиксировано, а распределено в соответствии с плотностью вероятности  $W_0(x)$ , тогда в качестве начальных условий должно быть указано именно это распределение:

$$W(x, t_0) = W_0(x). \quad (42)$$

В этом случае одномерная плотность вероятности  $W(x, t)$  может быть получена двумя различными способами.

1. Первый способ – это получение плотности вероятности перехода путем решения уравнения (30) с дельта-образным начальным распределением и после этого усреднение полученного результата по начальной плотности вероятности  $W_0(x)$ , см. формулу (4).

2. Второй способ – получение решения уравнения (30) для одномерной плотности вероятности с начальным распределением (42). Действительно, умножая уравнение (30) на  $W(x_0, t_0)$  и интегрируя по  $x_0$ , принимая во внимание (4), получим то же самое уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (30).

Таким образом, одномерная плотность вероятности марковского процесса удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова и при начальном дельта-образном распределении совпадает с плотностью вероятности перехода. Далее мы иногда вместо плотности вероятности перехода будем говорить об одномерной плотности вероятности с дельта-образным начальным распределением.

При решении реальных прикладных задач, в зависимости от конкретной постановки задачи, может быть использовано либо прямое, либо обратное уравнение Колмогорова. Если представляет интерес одномерная плотность вероятности с известным начальным распределением, тогда естественно использовать прямое уравнение Колмогорова. Если же необходимо вычислить распределение времен первого достижения границы как функции координаты начального состояния  $x_0$ , тогда наиболее естественно использовать обратное уравнение Колмогорова.

### Граничные условия.

Для получения решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, кроме начальных условий необходимо также знать граничные условия. Граничные условия могут быть нетривиальными, и определяются в первую очередь сутью задачи. Достаточно подробное описание типов граничных условий можно найти в [3].

Обсудим четыре основных типа граничных условий: отражающие, поглощающие, периодические, и так называемые естественные граничные условия, как наиболее часто используемые в литературе, особенно при численном моделировании систем.

Прежде всего отметим, что уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова может быть представлено в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (43)$$

Здесь  $G(x, t)$  – поток вероятности:

$$G(x, t) = a(x, t)W(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [D(x, t)W(x, t)]. \quad (44)$$

**Отражающая граница.** Отражающая граница может быть представлена в виде бесконечно высокой потенциальной стенки. Использование отражающей границы предполагает, что поток вероятности позади границы отсутствует. Математически условие отражающей границы имеет вид:

$$G(d, t) = 0, \quad (45)$$

где  $d$  – граничная точка. Любая траектория случайного процесса отражается, когда она контактирует с отражающей границей.

Рассмотрим пример эволюции плотности вероятности марковского процесса под влиянием постоянной силы  $a(x, t) = c$  (линейный потенциальный профиль). Если мы расположим отражающую границу в точке  $x = 0$ , то временная эволюция плотности вероятности перехода будет

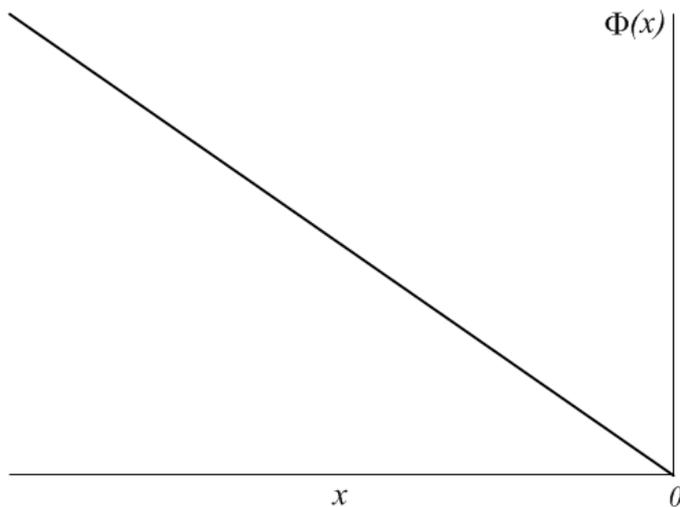


Рис. 3: Линейный наклонный потенциальный профиль  $\Phi(x, t) = -cx$ .

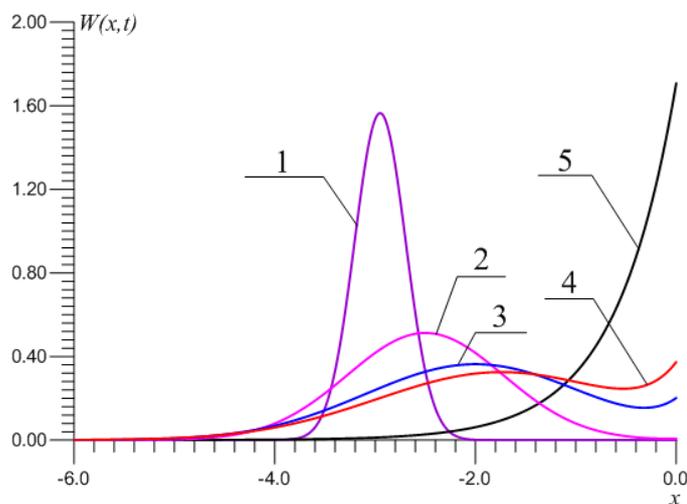


Рис. 4: Плотность вероятности в линейном наклонном потенциальном профиле с отражающей границей. Временная эволюция происходит от 1 к 5.

выглядеть как показано на Рис. 4. В этом частном примере можно видеть эффект, называемый эффектом переходной бимодальности. Не смотря на то, что у нас потенциальный профиль с одним минимумом, находящимся в точке  $x = 0$ , что приведет к унимодальной плотности вероятности, и начальное распределение также унимодальное (в данном случае - дельта-образное начальное распределение), можно видеть бимодальное распределение в некоторые моменты времени. Это происходит из-за обратного потока вероятности, отражающегося от границы.

**Поглощающая граница.** Поглощающая граница может быть представлена в виде бесконечно глубокой потенциальной ямы. Математически поглощающее граничное условие записывается в виде:

$$W(d, t) = 0, \quad (46)$$

где  $d$  – граничная точка. Любые траектории случайного процесса захватываются поглощающей границей, когда они ее пересекают, и уже не возвращаются в предграничную область. Если в нашей задаче имеются и отражающая и поглощающая границы, то с течением времени, вне

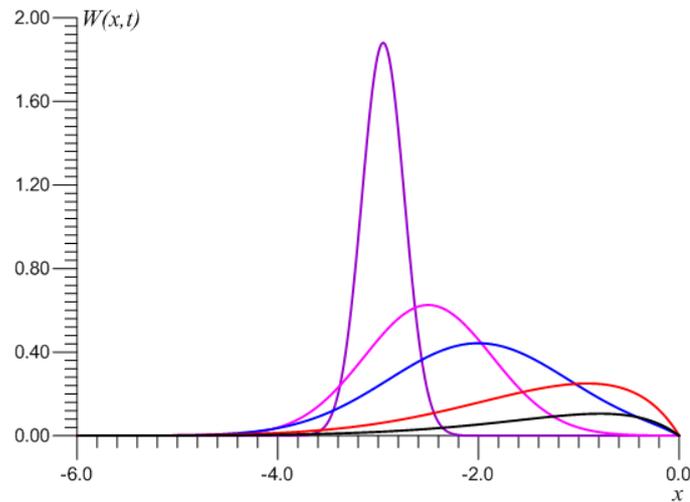


Рис. 5: Плотность вероятности в линейном наклонном потенциальном профиле с поглощающей границей.

зависимости от формы потенциального профиля, вся плотность вероятности будет захвачена поглощающей границей. Если рассматривать плотность вероятности только в интервале между границами, то можно догадаться, что условие нормировки не будет выполнено (см. Рис. 5). Однако, если подразумевать, что поглощающая граница представляет из себя ни что иное как бесконечно глубокую потенциальную яму, и принимать это во внимание, тогда полная плотность вероятности (в предграницной области и в яме) будет нормирована.

#### Периодические граничные условия.

Если рассмотреть марковский процесс в периодическом потенциальном профиле, то в ряде задач бывает удобно использовать периодические граничные условия:

$$W(x, t) = W(x + 2\pi, t). \quad (47)$$

Такие граничные условия особенно удобны при численном моделировании, что позволяет существенно сократить размер рассматриваемой области. Однако, такие граничные условия дают корректные результаты только если предполагается вычислить характеристики, которые также являются периодическими по координате. Например, в работе Стратоновича [6] периодические ГУ и метод приведенной плотности вероятности были использованы для нахождения области синхронизации ФАП первого порядка. В этом случае, необходимо найти среднее от  $\langle \sin x \rangle$ , и такой метод дает совершенно правильный результат. Позднее, в работе [7] данный метод был использован для нахождения ВАХ джозефсоновского контакта с большим затуханием при произвольной температуре (интенсивности шума), правда, без ссылки на книгу Стратоновича, которая была издана в США за 6 лет до данной работы, хотя математически эти задачи и их решение полностью идентичны. Однако, если требуется найти, например,  $\langle x^2 \rangle$ , то периодические граничные условия и метод приведенной фазы дадут неправильный результат. Если рассматривать задачу на неограниченном интервале, то на больших временах в системе будет наблюдаться диффузия  $\langle x^2 \rangle \sim Dt$ . Если же использовать периодические граничные условия, то с течением времени установится стационарное распределение, и диффузия прекратится [8]. В частности, это приведет к тому, что ширина линии генерации, имеющая конечную ширину, пропорциональную  $\sim D$ , станет нулевой.

**Естественные граничные условия.** Если рассмотреть марковский процесс на бесконечном интервале, тогда граничные условия при  $\pm\infty$  называются естественными. Существует две возможных ситуации. Если рассматриваемый потенциальный профиль при  $+\infty$  или  $-\infty$  стре-

мится к  $-\infty$  (бесконечно глубокая потенциальная яма), то при  $+\infty$  или  $-\infty$ , должна быть расположена поглощающая граница. Если, однако, рассматриваемый потенциальный профиль при  $+\infty$  или  $-\infty$  стремится к  $+\infty$ , то естественно предположить отражающую границу при  $+\infty$  или  $-\infty$ .

- 
- [1] К. Ito, Stochastic integral, Proc. Imp. Acad., Tokyo, 1944, v.20.
  - [2] Р.Л. Стратонович, Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений, Вестник МГУ, серия мат. мех., 1964, е1.
  - [3] К.В. Гардинер, Стохастические методы в естественных науках, Москва, "Мир" 1986 (C.W.Gardiner, Handbook of Stochastic methods (Springer-Verlag, 1985).)
  - [4] H.Risken, The Fokker-Planck equation (Springer Verlag, Berlin, 1985).
  - [5] А.Н.Малахов, Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований (Советское радио, Москва, 1978).
  - [6] R.L.Stratonovich, Topics of the Theory of Random Noise (Gordon and Breach, New York, 1963).
  - [7] V. Ambegaokar and B.I. Halperin, Phys. Rev. Lett., **22**, 1364, (1969).
  - [8] В.И. Тихонов, М.А. Миронов, Марковские процессы (Москва, Советское радио, 1977).

# Случайные процессы в нелинейных системах

## Лекция 4

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН, ГСП 105,  
Нижний Новгород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

### I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГОРОВА

В данной лекции будут рассмотрены методы решения нестационарного и стационарного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (1) с постоянными во времени коэффициентами сноса и диффузии, т.е. методы описания временной динамики плотности вероятности  $W(x, t)$  и ее стационарных распределений.

#### 1. Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова.

Для одномерного марковского процесса во многих случаях можно легко найти стационарную плотность вероятности. Если рассмотреть случай, когда коэффициенты сноса и диффузии не зависят от времени, тогда в стационарном состоянии условная плотность вероятности перехода  $W(x, t|x_0, t_0)$  зависит только от разности моментов времени. Одномерная стационарная плотность вероятности  $W_{st}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t)$ , если она существует, является абсолютно независимой от времени и начального распределения  $W_0(x)$ . Вот почему для стационарного состояния  $\partial W_{st}(x)/\partial t = 0$  и, таким образом, поток вероятности постоянен  $G(x) = G = const$ .

Стационарная плотность вероятности может быть легко получена путем решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [-a(x)W(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)W(x, t)] \right\} \quad (1)$$

при условии  $\partial W(x, t)/\partial t = 0$ . Действительно, тогда мы получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} [-a(x)W_{st}(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)W_{st}(x)] \right\} = 0. \quad (2)$$

Например, если рассмотреть случай нулевого потока вероятности на границах  $G = 0$ , то интегрируя это уравнения дважды, получим:

$$W_{st}(x) = \frac{C}{D(x)} \exp \left[ 2 \int_{x'}^x \frac{a(x)}{D(x)} dx \right], \quad (3)$$

где  $C$  определяется из условия нормировки. Для постоянного коэффициента диффузии  $D(x) = D = const$  можно получить существенно более простое выражение:

$$W_{st}(x) = \frac{C}{D} \exp \left[ -\frac{2\Phi(x)}{hD} \right]. \quad (4)$$

где мы подставили вместо коэффициента сноса производную от потенциального профиля  $a(x) = -\frac{d\Phi(x)}{h dx}$ , здесь  $h$  – затухание (вязкость).

Таким образом, если мы можем из уравнения, описывающего поведение системы, определить коэффициенты сноса и диффузии, то в некоторых случаях возможно сразу записать выражение для одномерной стационарной плотности вероятности. Этот пример демонстрирует эффективность использования уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова.

## 2. Метод собственных функций и собственных чисел.

Метод собственных функций и собственных чисел является наиболее широко используемым в западной литературе. Этот метод удобно применять, когда коэффициенты сноса и диффузии не зависят от времени. В этом случае уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова принимает вид (1).

Будем искать решение УФПК в следующем виде:

$$W(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (5)$$

где  $X$  и  $T$  – соответственно, функции координаты и времени. Деля обе части уравнения (1) на (5), получим:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)X(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)X(x)] \right\} X^{-1}(x). \quad (6)$$

Левая часть (6) зависит только от  $t$ , в то время как правая часть зависит только от  $x$ . Таким образом, обе части равны одной константе, которую мы обозначим как  $-\gamma$ ,  $\gamma \geq 0$ . Из уравнения (6) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\gamma, \quad (7)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} [-a(x)X(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)X(x)] \right\} = -\gamma X(x). \quad (8)$$

Простое уравнение первого порядка (7) имеет решение

$$T(t) = e^{-\gamma t}, \quad (9)$$

а решение линейного уравнения второго порядка (8) может быть найдено используя известные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Это решение  $X(x, A, B, \gamma)$  определяется двумя произвольными постоянными  $A$  и  $B$ . Поскольку уравнение (1) линейно, его общее решение имеет вид:

$$W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X(x, A_n, B_n, \gamma_n) e^{-\gamma_n t}, \quad (10)$$

где константы  $A_n$ ,  $B_n$  и  $\gamma_n$  определяются начальными и граничными условиями.

Можно показать (см. [1], [2]) что если разность потоков вероятности  $G(x, t)$  через границы равна нулю, тогда решение (10) может быть представлено в следующем виде:

$$W(x, t) = T_0 W_{st}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n e^{-\gamma_n(t-t_0)}, \quad (11)$$

где  $X_n(x)$  – собственные функции уравнения (8), соответствующие собственным числам  $\gamma_n$ ,  $T_n$  – постоянные коэффициенты. Функции  $X_n(x)$  являются ортонормированными с весом  $\frac{1}{W_{st}(x)}$ :

$$\int \frac{X_m(x)X_n(x)dx}{W_{st}(x)} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Если известна начальная плотность вероятности  $W(x, t_0) = W_0(x)$ , то коэффициенты  $T_n$  определяются следующим выражением:

$$T_n = \int \frac{W_0(x)X_n(x)}{W_{st}(x)} dx.$$

Если начальная плотность вероятности является дельта-функцией,  $W_0(x) = \delta(x - x_0)$ , тогда решение (10) имеет вид:

$$W(x, t) = W(x, t|x_0, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(x_0)}{W_{st}(x_0)} e^{-\gamma_n(t-t_0)},$$

где  $X_0(x) = W_{st}(x)$  и  $\gamma_0 = 0$ .

Следует отметить, что если спектр собственных чисел достаточно разреженный, как, например, в случае малой интенсивности шума, то обратное минимальное ненулевое собственное число является оценкой различных характерных временных масштабов системы. Действительно, если рассмотреть простейший пример прямоугольного потенциально-го профиля, имеющего отражающие стенки в точках 0 и  $L$  [3, 4], для которого может быть аналитически получена функция Грина:

$$W(x, t) = 1/L + (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(n\pi)^2 t / (L^2 B)] \cos(\pi n x / L) \cos(\pi n x_0 / L), \quad (12)$$

где  $B = 2/D$ , то обратное минимальное ненулевое собственное число равно  $\lambda_1^{-1} = L^2 B / \pi^2$ . Для данного случая могут быть вычислены и время установления к стационарному распределению, как время выхода за границу  $L/2$ , при дельта-образном начальном распределении, находящемся в  $x = 0$ , так и время корреляции [3]. Для времени релаксации получаем  $\tau_{rel} = L^2 B / 8$ , для времени корреляции  $\tau_{cor} = L^2 B / 10$ . Как видно, оба временных масштаба практически совпадают с  $\lambda_1^{-1}$  и, таким образом, достаточно хорошо описывают асимптотику соответствующих измеряемых величин при больших временах наблюдения.

### 3. Метод преобразования Лапласа.

Смысл применения преобразования Лапласа к УФПК заключается в исключении временной переменной  $t$ , что позволяет редуцировать уравнение в частных производных к уравнению в обыкновенных производных. Метод преобразования Лапласа обычно используется, когда коэффициенты сноса и диффузии УФПК не зависят от времени.

Обозначим преобразование Лапласа функции  $W(x, t)$  как:

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} W(x, t) e^{-st} dt.$$

Применяя правила преобразования Лапласа (см., например, [5]) к уравнению (1), получим:

$$sY(x, s) - W_0(x) = \left\{ -\frac{d}{dx} [a(x)Y(x, s)] + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [D(x)Y(x, s)] \right\}. \quad (13)$$

Здесь  $W_0(x)$  – начальная плотность вероятности.

Уравнение (13) является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Начальные условия включены в уравнение (13). Граничные условия для функций  $W(x, t)$  переходят в граничные условия для функций  $Y(x, s)$  и должны быть учтены при решении уравнения (13).

Когда найдено решение уравнения (13), плотность вероятности  $W(x, t)$  может быть получена используя обратное преобразование Лапласа.

Отметим, что именно на базе метода преобразования Лапласа были разработаны новые методы для получения точных временных характеристик случайных процессов, которые будут подробно описаны в следующих лекциях. Однако, нахождение решения уравнения (13) является достаточно сложным делом. Например, если рассмотреть процесс броуновской диффузии в кусочно-параболическом потенциальном профиле, то решение уравнения (13) будет выражаться через спецфункции – функции Вебера (параболического цилиндра) [6]. Для более сложных потенциальных профилей специальные функции неизвестны, однако, в ряде случаев они могут быть получены и изучены по аналогии с функциями Вебера, например, мною такие спецфункции были получены для потенциальных профилей четвертого порядка. Ну и, поскольку даже решения уравнения в терминах преобразования Лапласа (13) неизвестны, не стоит надеяться, что можно получить плотности вероятности, используя обратное преобразование Лапласа от этого решения (за исключением ряда простейших случаев, таких как параболический или линейный потенциальный профиль с одним минимумом).

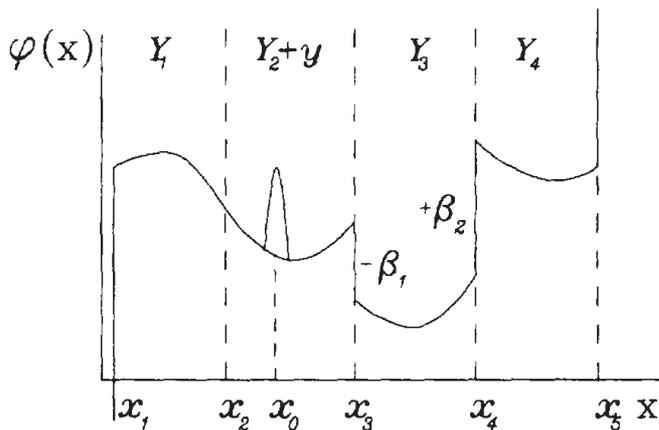


Рис. 1: Кусочно-параболический потенциальный профиль.

Рассмотрим УФПК с постоянным коэффициентом диффузии и параболическим потенциальным профилем

$$\varphi(x) = b_k(x - \ell_k)^2/2 + \varphi_{0k},$$

в интервале  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ . Тогда уравнение (13) примет вид

$$\frac{d^2Y(x, s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} [b_k(x - \ell_k) Y(x, s)] - \gamma^2 Y(x, s) = -B\delta(x - x_0), \quad (14)$$

где  $B = 2/D$ ,  $\varphi(x) = 2\Phi(x)/hD = \Phi(x)/kT$  – безразмерный потенциальный профиль и  $\gamma^2 = sB$ .

Можно показать, что общее решение уравнения (14) при  $b_k \neq 0$  может быть представлено в рассматриваемом интервале в виде:

$$Y_k(x, s) = \exp(-\varphi(x)/2) \{A_k U(a, z) + C_k U(a, -z)\},$$

если  $x_0 \notin [x_k, x_{k+1}]$ .

Если, однако  $x_0 \in [x_k, x_{k+1}]$ , тогда

$$Y(x, s) = Y_k(x, s) + y(x, s),$$

где

$$y(x, s) = \frac{B\Gamma(a + \frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi|b_k|}} e^{[\varphi(x_0) - \varphi(x)]/2} \begin{cases} U(a, z_0)U(a, -z), & x < x_0 \\ U(a, -z_0)U(a, z), & x > x_0 \end{cases} \equiv \begin{cases} y^-(x, s), & x < x_0 \\ y^+(x, s), & x > x_0 \end{cases}.$$

Здесь  $A_k, C_k$  – произвольные постоянные,  $a = \sigma - \frac{1}{2}\text{sgn}b_k$ ,  $\sigma = \frac{\gamma^2}{|b_k|} = \frac{sB}{|b_k|}$ ,  $z = \sqrt{|b_k|}(x - \ell_k)$ ,  $z_0 = \sqrt{|b_k|}(x_0 - \ell_k)$  и  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Функции Вебера (параболического цилиндра)  $U(a, z)$ ,  $U(a, -z)$  – линейно-независимые функции.

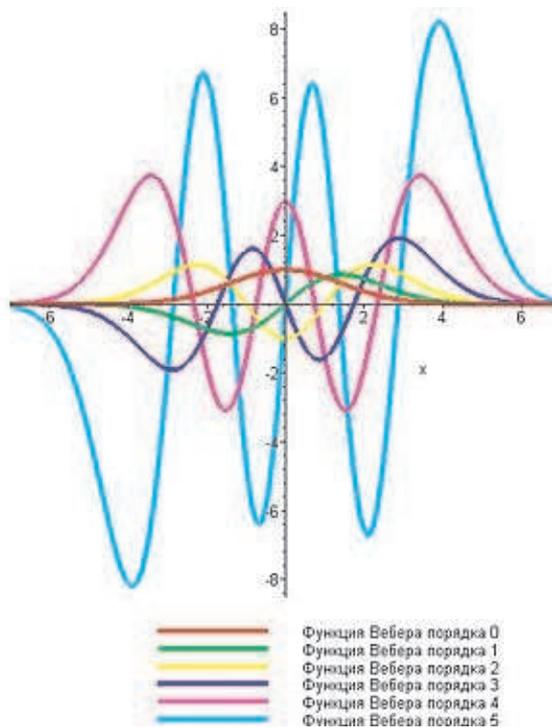


Рис. 2: Функции Вебера первых целых порядков.

Теперь рассмотрим кусочно-параболический потенциальный профиль, изображенный на Рис. 1. Различные виды соединения участков, изображенных на Рис. 1, могут быть классифицированы следующим образом:

$x = x_2$ : гладкое соединение;

$x = x_3, x = x_4$ : ограниченный скачок потенциала;

$x = x_5$ : бесконечный скачок потенциала вверх (отражающая граница);  
 $x = x_1$ : бесконечный скачок потенциала вниз (поглощающая граница).

Обозначения функций  $Y_k(x, s)$  для соответствующих интервалов  $x$  также показаны на Рис. 1. Обсудим граничные условия на краях интервалов в точках  $x_1, \dots, x_5$ .

В точке  $x = x_1$  плотность вероятности равна нулю, поэтому  $Y_1(x_1, s) = 0$ . В точке  $x = x_2$  и плотность вероятности и поток вероятности непрерывны, следовательно  $\hat{G}(x_2 - 0, s) = \hat{G}(x_2 + 0, s)$ ,  $Y_1(x_2 - 0, s) = Y_2(x_2 + 0, s) + y^-(x_2 + 0, s)$ . В точках  $x = x_3$  и  $x = x_4$  плотность вероятности имеет скачок, но поток вероятности непрерывен, следовательно  
 $x = x_3$ :  $\hat{G}(x_3 - 0, s) = \hat{G}(x_3 + 0, s)$ ,  $Y_2(x_3 - 0, s) + y^+(x_3 - 0, s) = Y_3(x_3 + 0, s)e^{\beta_1}$ ;  
 $x = x_4$ :  $\hat{G}(x_4 - 0, s) = \hat{G}(x_4 + 0, s)$ ,  $Y_3(x_4 - 0, s) = Y_4(x_4 + 0, s)e^{\beta_2}$ .

В точке  $x = x_5$  поток вероятности равен нулю:

$$\hat{G}(x_5 - 0, s) = 0, \text{ т.е. } \left( \frac{dY_4(x, s)}{dx} + \frac{d\varphi(x)}{dx} Y_4(x, s) \right) \Big|_{x=x_5-0} = 0.$$

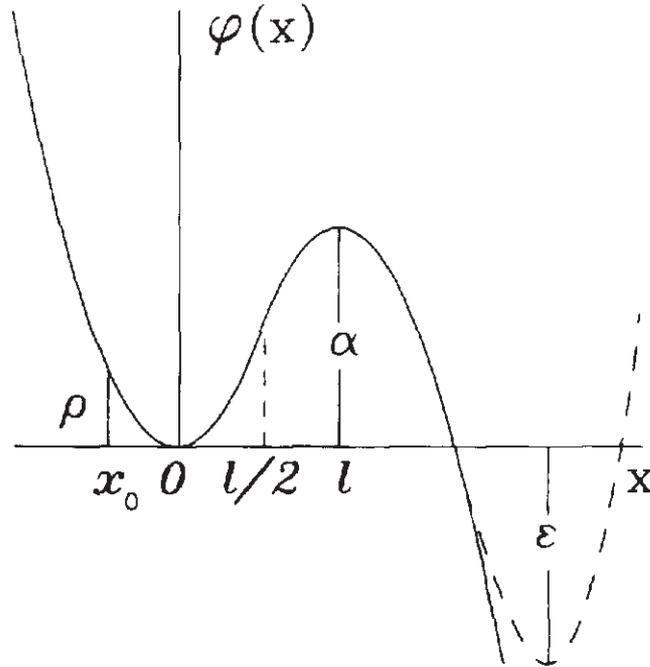


Рис. 3: Метастабильный кусочно-параболический потенциальный профиль.

Рассмотрим гладкий кусочно-параболический потенциальный профиль, состоящий из двух параболических участков, соединенный в точке  $(x = l/2)$ , как показано на Рис. 3, здесь плотность вероятности и поток вероятности в точке соединения будут непрерывными. Используя соответствующие граничные условия, можно показать, что для  $x > l/2$ :

$$Y(x, s) = B \frac{e^{[\rho-\alpha]/2} U(\sigma - \frac{1}{2}, -\sqrt{b}x_0) e^{b[x-l]^2/4} U(\sigma + \frac{1}{2}, \sqrt{b}(x-l))}{\sqrt{b}[\sigma U^2(\sigma + \frac{1}{2}, -\sqrt{\alpha}) + U^2(\sigma - \frac{1}{2}, -\sqrt{\alpha})]}.$$

где  $\sigma = \frac{sB}{b}$ ,  $B = 2/D$ ,  $\rho = bx_0^2/2$ . К сожалению, это простое, казалось бы, выражение, не удается обратить во временную эволюцию плотности вероятности.

#### 4. Метод характеристической функции.

Иногда возможно получить упрощения решения задачи путем перехода в уравнении (1) от плотности вероятности  $W(x, t)$  к характеристической функции:

$$\Theta(u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t) e^{jux} dx. \quad (15)$$

Обычно такой переход может быть выполнен используя преобразование Фурье. После подстановки конкретного вида коэффициентов сноса  $a(x, t)$  и диффузии  $D(x, t)$ , обе части уравнения (1) умножаются на  $e^{jux}$  и интегрируются по  $x$ . Начальное условие может быть найдено подстановкой начальной плотности вероятности  $W_0(x)$  в (15).

#### 5. Метод замены независимых переменных.

Также для решения УФПК может быть использован метод замены независимых переменных. Цель этого метода – редуцировать уравнение УФПК к уравнению диффузии (см. пример ниже), описывающее динамику т.н. винеровского процесса. Однако, существует теорема Черкасова, доказывающая, что необходимые замены переменных могут быть сделаны только для ограниченного класса коэффициентов сноса и диффузии, например для таких, что:  $a(x, t) = b(t)x + f(t)$ ,  $D(x, t) = F(t)$ .

#### 6. Численные методы – явная численная схема.

В настоящее время уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова может быть легко решено численно. Существует масса различных методов, например, явная численная схема, неявная численная схема, метод Крэнка-Никольсон, метод матричных цепных дробей. Рассмотрим наиболее простой метод – явную численную схему. Эта схема является наиболее медленной из-за необходимости выбирать малый шаг по времени для сходимости алгоритма, но она наиболее простая, и также для нее наиболее просто записать граничные условия.

Допустим, нам требуется найти решение УФПК с начальными условиями  $W(x, t_0) = W_0(x)$ . Рассмотрим сетку с узлами, расположенными в точках пересечения параллельных линий:

$$x = c + ih, \quad (i = 0, 1, \dots, N; \quad N = (d - c)/h, \quad t = jl, \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Узлы, расположенные на линиях  $x = c$ ,  $x = d$ ,  $t = 0$  будем называть граничными узлами, а все остальные узлы – внутренними. Для каждого внутреннего узла  $(i, j)$  запишем разностную схему, с некоторой точностью аппроксимирующую УФПК. Отметим, что УФПК может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} D(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} D(x, t) - a(x, t) \right] \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) + \\ + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} a(x, t) \right] W(x, t). \end{aligned} \quad (16)$$

В уравнении (16) мы можем приближенно подставить производные в следующем виде:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \approx \frac{W_{i+1, j} - W_{i-1, j}}{2h}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{W_{i+1, j} - 2W_{i, j} + W_{i-1, j}}{h^2}, \quad (18)$$

где  $W_{i, j} = W(c+ih, j)$ . Производную по времени мы представим в виде разности в текущий и прошедший моменты времени:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \approx \frac{W_{i, j+1} - W_{i, j}}{l}. \quad (19)$$

Подставляя (17), (18), (19) в (16), получим:

$$W_{i, j+1} = \alpha_{i, j} W_{i+1, j} + \beta_{i, j} W_{i, j} + \gamma_{i, j} W_{i-1, j} \quad (j \geq 0), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) &= \frac{l}{2h^2} D(x, t) + \frac{l}{2h} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x, t) - a(x, t) \right], \\ \beta(x, t) &= 1 - \frac{l}{h^2} D(x, t) + l \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} a(x, t) \right], \\ \gamma(x, t) &= \frac{l}{2h^2} D(x, t) - \frac{l}{2h} \left[ \frac{\partial}{\partial x} D(x, t) - a(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Разностная схема (21) содержит значения решения на четырех узлах, один в текущий момент времени и три в предыдущий момент времени. Эта разностная схема аппроксимирует УФПК (16) с точностью  $O(l + h^2)$ .

В качестве первой итерации программы нужно записать начальные значения плотности вероятности, соответствующие  $x = c + ih$ . Граничные условия могут быть либо поглощающие  $W_{0, j} = W_{N, j} = 0$ , либо отражающие:

$$\begin{aligned} W_{0, j} &= -\frac{2h}{D(x, t)} \left[ 2a(x, t) - \frac{\partial D(x, t)}{\partial x} \right] W_{1, j} + W_{2, j}, \\ W_{N, j} &= \frac{2h}{D(x, t)} \left[ 2a(x, t) - \frac{\partial D(x, t)}{\partial x} \right] W_{N-1, j} + W_{N-2, j}, \end{aligned}$$

Таким образом, формула (20) дает явное выражение для решения в слое  $j + 1$  через ранее полученное решение в слое  $j$ .

Для использования явной численной схемы должно выполняться условие устойчивости. Можно показать, что явная схема устойчива, если в рассматриваемом интервале выполняются следующие условия:

$$D(x, t) \geq 0, \quad l/h^2 < 1/D(x, t).$$

Как следует из второго неравенства, для сходимости явной схемы требуется очень малый шаг по времени.

## II. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРОЦЕССОВ, ЧЬИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДА ИЗВЕСТНЫ АНАЛИТИЧЕСКИ.

### Винеровский процесс.

Процесс, который описывается УФПК (1) с нулевым коэффициентом сноса  $a(x) = 0$  и постоянным коэффициентом диффузии называется процессом Винера. Уравнение для плотности вероятности перехода – уравнение диффузии:

$$\frac{\partial W(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t|x_0, t_0). \quad (22)$$

с начальной дельта-образной плотностью вероятности  $W(x, t_0|x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$ . Плотность вероятности винеровского процесса имеет вид:

$$W(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2D(t - t_0)}\right). \quad (23)$$

### Процесс Орнштейна-Уленбека.

Случайный процесс, который описывается УФПК (1) с линейным коэффициентом сноса  $a(x) = -bx$  и постоянным коэффициентом диффузии называется процессом Орнштейна-Уленбека. Уравнение для плотности вероятности переходов в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial W(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [bxW(x, t|x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)W(x, t|x_0, t_0)] \right\}. \quad (24)$$

Решением этого уравнения также будет гауссово распределение:

$$W(x, t|x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{D}(t)}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 e^{-bt})^2}{2\mathcal{D}(t)}\right). \quad (25)$$

где  $\mathcal{D}(t) = D(1 - e^{-2bt})/2b$  – дисперсия.

Плотность вероятности (25) может быть получена из уравнения (24), используя метод собственных функций. Искомая плотность вероятности может быть представлена в виде бесконечного ряда по полиномам Эрмита и просуммирована в плотность вероятности (25). Однако, то же самое распределение может быть получено существенно более простым путем, используя методы кумулянтного анализа [7].

Если известно, что система линейная, и шум, воздействующий на эту систему, является гауссовым, то стационарная плотность вероятности всегда будет гауссовой. В случае, когда начальное распределение является дельта-образным (как мы помним, дельта-функцию можно представить в виде предельного перехода из гауссова распределения), то одномерная плотность вероятности (впрочем, как и плотность вероятности перехода) будет гауссовой в любой момент времени. Если имеется произвольная начальная плотность вероятности, то как мы помним из прошлой лекции, искомую одномерную плотность вероятности можно получить путем усреднения плотности вероятности перехода по начальному распределению. Итак, в случае линейной системы, даже если коэффициент сноса зависит от времени  $a(x, t) = -bx + f(t)$ , где  $f(t)$  – произвольная функция времени, система не перестанет быть линейной. В этом случае удобно использовать метод кумулянтного анализа, получить линейные дифференциальные уравнения для среднего  $m(t)$  и дисперсии  $\mathcal{D}(t)$ :

$$\frac{dm(t)}{dt} = -bm(t) + f(t),$$

$$\frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} = -2b\mathcal{D}(t) + D,$$

и легко их решить. Полученные среднее и дисперсию надо подставить в гауссово распределение общего вида:

$$W(x, t|x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{D}(t)}} \exp\left(-\frac{(x - m(t))^2}{2\mathcal{D}(t)}\right) \quad (26)$$

и получить искомую плотность вероятности перехода.

Однако, я знаю только одно реальное сверхпроводящее устройство, которое имеет малую нелинейность и может приближенно быть представлено как линейное, это безгистерезисный СВЧ СКВИД.

- 
- [1] R.L.Stratonovich, Topics of the Theory of Random Noise (Gordon and Breach, New York, 1963).  
 [2] В.И. Тихонов, М.А. Миронов, Марковские процессы (Москва, Советское радио, 1977).  
 [3] W. Nadler, K. Schulten, Generalized moment expansion for Brownian relaxation processes, J. Chem. Phys. - 1985. - Vol. 82, №1. - P. 151-160.  
 [4] H. Risken, The Fokker-Planck equation (Springer Verlag, Berlin, 1985).  
 [5] Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования (Москва, Наука, 1971); G.Doetsch, Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation (R.Oldenbourg, Munchen, 1961).  
 [6] A.N. Malakhov and A.L. Pankratov, Exact solution of the Kramers' problem for piece-wise parabolic potential profiles, Physica A, 229, No. 1 (1996) pp. 109-126.  
 [7] А.Н.Малахов, Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований (Советское радио, Москва, 1978).

# Случайные процессы в нелинейных системах

## Лекция 5

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН, ГСП 105,  
Нижний Новгород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

### 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПОДХОДЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДА

Как было отмечено в предыдущей лекции, нестационарное решение уравнения Фоккера-Планка известно аналитически только для нескольких частных случаев потенциальных профилей. Поэтому наиболее распространенным путем анализа переходных диффузионных процессов является получение их временных характеристик. В данной лекции рассмотрим несколько известных методов для нахождения временных характеристик марковских процессов, проанализируем их плюсы и минусы.

#### А. Подход Крамерса и температурная зависимость префактора времени Крамерса

Оригинальная работа Крамерса [1] стимулировала исследования, направленные на вычисление скоростей переходов в различных системах, находящихся под шумовым воздействием. В настоящее время проблема вычисления скоростей перехода называется проблемой Крамерса [2], [3]. С другой стороны, проблемой Крамерса при описании случайных процессов также называют проблему перехода от уравнения Ланжевена (или соответствующего уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова) для произвольной вязкости к уравнению с большим затуханием. Этот переход достаточно тривиально можно сделать [4] для уравнения Ланжевена с белым гауссовым шумом, если интересоваться различными статистическими характеристиками координаты броуновской частицы, но в случае, когда интересны статистические характеристики скорости, одновременное использование белошумового приближения и пренебрежение инерционностью частицы может привести к неправильному результату, поскольку установившееся распределение скоростей не будет максвелловским, а будет зависеть от распределения координаты. Мы же в дальнейшем под "проблемой Крамерса" будем понимать именно задачу нахождения времен переходов передемпфированной броуновской частицы из одного состояния в другое.

Рассмотрим потенциальный профиль  $U(x)$ , описывающий метастабильное состояние, представленный на Рис. 1.

В начальный момент времени броуновская частица находится в потенциальном минимуме, например где-нибудь между точками  $x_1$  и  $x_2$ . Будучи подверженной флуктуационному воздействию, броуновская частица через некоторое время перескочит через потенциальный барьер, имеющий высоту  $\Delta U$ . Необходимо найти среднее время распада метастабильного состояния (обратную величину среднего времени распада называют скоростью распада).

Для нахождения среднего времени перехода через потенциальный барьер, воспользуемся уравнением Фоккера-Планка, которое для постоянного коэффициента диффузии может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{kT}{h} e^{-U(x)/kT} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{U(x)/kT} W(x, t) \right] \right\}, \quad (1)$$

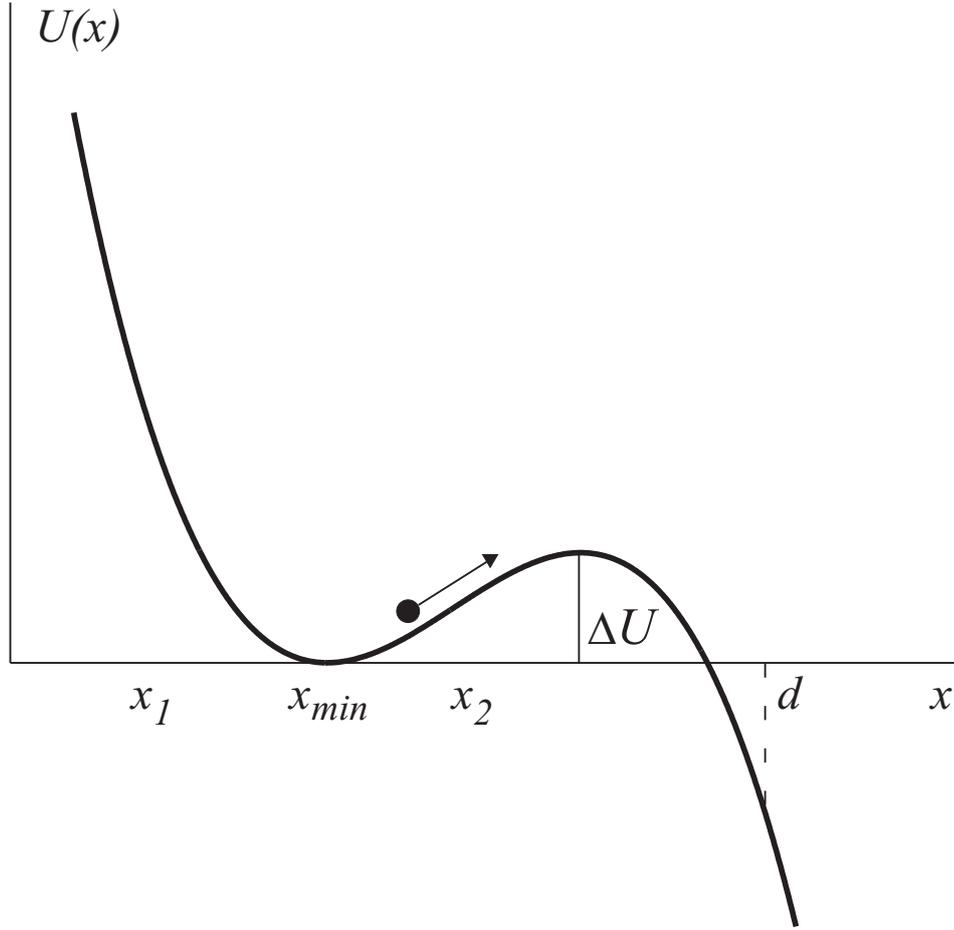


Рис. 1: Потенциальный профиль, описывающий метастабильное состояние.

где мы подставили  $a(x) = -\frac{dU(x)}{h dx}$ , здесь  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - температура и  $h$  - вязкость.

Рассмотрим случай, когда коэффициент диффузии является малым, или, точнее, когда высота потенциального барьера  $\Delta U$  много больше, чем  $kT$ . В этом предельном случае можно получить аналитическое выражение для среднего времени перехода, поскольку поток вероятности  $G$  через вершину потенциального барьера в окрестности  $x_{max}$  очень мал, так что плотность вероятности  $W(x, t)$  в потенциальной яме практически не изменяется с течением времени, представляя квазистационарное распределение. Для такого квазистационарного состояния малый поток вероятности  $G$  должен быть приближенно независимым от координаты  $x$  и может быть представлен в форме:

$$G = - \left\{ \frac{kT}{h} e^{-U(x)/kT} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{U(x)/kT} W(x, t) \right] \right\}. \quad (2)$$

Интегрируя (2) между  $x_{min}$  и  $d$  получим:

$$G \int_{x_{min}}^d e^{U(x)/kT} dx = \frac{kT}{h} \left[ e^{U(x_{min})/kT} W(x_{min}, t) - e^{U(d)/kT} W(d, t) \right]; \quad (3)$$

или если мы предположим, что в точке  $x = d$  плотность вероятности практически равна нулю (частицы, например, могут изыматься из рассмотрения при достижении точки  $x = d$ , что

соответствует поглощающей границе), то поток вероятности можно выразить через плотность вероятности в точке  $x = x_{min}$ , т.е.

$$G = \frac{kT}{h} e^{U(x_{min})/kT} W(x_{min}, t) / \int_{x_{min}}^d e^{U(x)/kT} dx. \quad (4)$$

Если потенциальный барьер достаточно высокий, то плотность вероятности вблизи  $x_{min}$  приближенно равна стационарному распределению в потенциальном минимуме:

$$W(x, t) \approx W(x_{min}, t) e^{-[U(x) - U(x_{min})]/kT}. \quad (5)$$

Вероятность  $P$  найти частицу в окрестности  $x_{min}$  имеет вид:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} W(x, t) dx \approx W(x_{min}, t) e^{U(x_{min})/kT} \int_{x_1}^{x_2} e^{-U(x)/kT} dx. \quad (6)$$

Если  $kT$  мало, плотность вероятности становится очень малой для  $x$  значительно удаленных от  $x_{min}$ , это означает, что значения  $x_1$  и  $x_2$  не обязательно знать точно.

Время перехода вводится как вероятность  $P$ , деленная на поток вероятности  $G$ . Тогда, используя (4) и (6), можно получить следующее выражение для времени перехода:

$$\tau = \frac{h}{kT} \int_{x_1}^{x_2} e^{-U(x)/kT} dx \int_{x_{min}}^d e^{U(x)/kT} dx. \quad (7)$$

В то время, как основной вклад в первый интеграл дается областью вблизи  $x_{min}$ , основной вклад во второй интеграл дается областью вблизи  $x_{max}$ . Мы, таким образом, разложим  $U(x)$  в первом и втором интегралах в соответствие с:

$$U(x) \approx U(x_{min}) + \frac{1}{2} U''(x_{min}) (x - x_{min})^2, \quad (8)$$

$$U(x) \approx U(x_{max}) - \frac{1}{2} |U''(x_{max})| (x - x_{max})^2. \quad (9)$$

После этого пределы интегрирования можно распространить до  $\pm\infty$  и получить, таким образом, хорошо известное выражение для времени перехода Крамерса:

$$\tau = \frac{2\pi h}{\sqrt{U''(x_{min})|U''(x_{max})|}} e^{\Delta U/kT}, \quad (10)$$

где  $\Delta U = U(x_{max}) - U(x_{min})$ . Как было показано в работе [5], точность вычисления выражения (10) может быть увеличена, если вычислять интегралы (7) более точно, например разлагая потенциал в ряд в выражениях (8) и (9) вплоть до 4-го порядка.

Может быть задан вопрос: что, если рассматриваемый потенциальный профиль является таким, что либо  $U''(x_{max}) = 0$ , либо  $U''(x_{min}) = 0$ ? Можно видеть, что формула Крамерса (10) в этом случае не работает. Но данная трудность может быть легко преодолена, поскольку мы знаем, как формула Крамерса была получена: просто подставим соответствующий потенциальный профиль в интегралы в выражении (7) и получим другую формулу, подобную формуле Крамерса:

$$\tau = \tau_0(kT) e^{\Delta U/kT}, \quad (11)$$

где префактор  $\tau_0(kT)$  является функцией температуры и отражает конкретный вид потенциала. Например, такую формулу можно легко получить для кусочно-параболического потенциального профиля 4-го порядка. Формула (11) для  $\tau_0(kT) = const$  также известна как закон Аррениуса.

Влияние формы потенциальной ямы и потенциального барьера на время перехода было детально исследовано в работе Агудова и Малахова [6].

В таблице 1 представлена температурная зависимость префактора  $\tau_0(kT)$  для потенциальных барьеров и ям различной формы в предельном случае малой интенсивности шума по сравнению с высотой потенциального барьера (отметим, что  $|x|^\infty$  означает прямоугольный потенциальный профиль). Для рассматриваемых функций  $U_b(x)$  и  $U_t(x)$  зависимость  $\tau_0(kT)$  изменяется от  $\tau_0 \sim (kT)^3$  до  $\tau_0 \sim (kT)^{-1}$ . Функции  $U_b(x)$  и  $U_t(x)$ , соответственно, потенциалы в области дна ямы и вершины барьера. Как следует из таблицы 1, закон Аррениуса (11), т.е.  $\tau_0(kT) = const$ , возникает только для таких форм потенциальных барьеров и ям, что  $1/p + 1/q = 1$  (где  $p$  и  $q$  - показатели степеней). Это условие выполняется для параболической ямы и параболического барьера ( $p = 2, q = 2$ ), а также для прямоугольной ямы ( $p = \infty$ ) и треугольного барьера ( $q = 1$ ), и, наоборот, для треугольной ямы ( $p = 1$ ) и прямоугольного барьера ( $q = \infty$ ).

$\tau_0(kT) \sim$		$U_t(x) \sim$					
		$ x ^{\frac{1}{2}}$	$ x ^{\frac{2}{3}}$	$ x $	$x^2$	$x^4$	$x^\infty$
$U_b(x) \sim$	$ x ^{\frac{1}{2}}$	$(kT)^3$	$(kT)^{\frac{5}{2}}$	$(kT)^2$	$(kT)^{\frac{3}{2}}$	$(kT)^{\frac{5}{4}}$	$(kT)^1$
	$ x ^{\frac{2}{3}}$	$(kT)^{\frac{5}{2}}$	$(kT)^2$	$(kT)^{\frac{3}{2}}$	$(kT)^1$	$(kT)^{\frac{3}{4}}$	$(kT)^{\frac{1}{2}}$
	$ x $	$(kT)^2$	$(kT)^{\frac{3}{2}}$	$(kT)^1$	$(kT)^{\frac{1}{2}}$	$(kT)^{\frac{1}{4}}$	$(kT)^0$
	$x^2$	$(kT)^{\frac{3}{2}}$	$(kT)^1$	$(kT)^{\frac{1}{2}}$	$(kT)^0$	$(kT)^{-\frac{1}{4}}$	$(kT)^{-\frac{1}{2}}$
	$x^4$	$(kT)^{\frac{5}{4}}$	$(kT)^{\frac{3}{4}}$	$(kT)^{\frac{1}{4}}$	$(kT)^{-\frac{1}{4}}$	$(kT)^{-\frac{1}{2}}$	$(kT)^{-\frac{3}{4}}$
	$ x ^\infty$	$(kT)^1$	$(kT)^{\frac{1}{2}}$	$(kT)^0$	$(kT)^{-\frac{1}{2}}$	$(kT)^{-\frac{3}{4}}$	$(kT)^{-1}$

Таблица 1. Температурная зависимость префактора времени перехода.

Таким образом, если сравнить температурную зависимость времен перехода, полученных экспериментально, с температурной зависимостью времен Крамерса, представленных в данной таблице, то можно сделать вывод о форме потенциального профиля, описывающего рассматриваемую систему.

### В. Собственные числа как скорости перехода

Другим часто используемым приближенным подходом для получения скоростей перехода, является метод собственных функций. Как пример, рассмотрим симметричный бистабильный потенциальный профиль, представленный на Рис. 2.

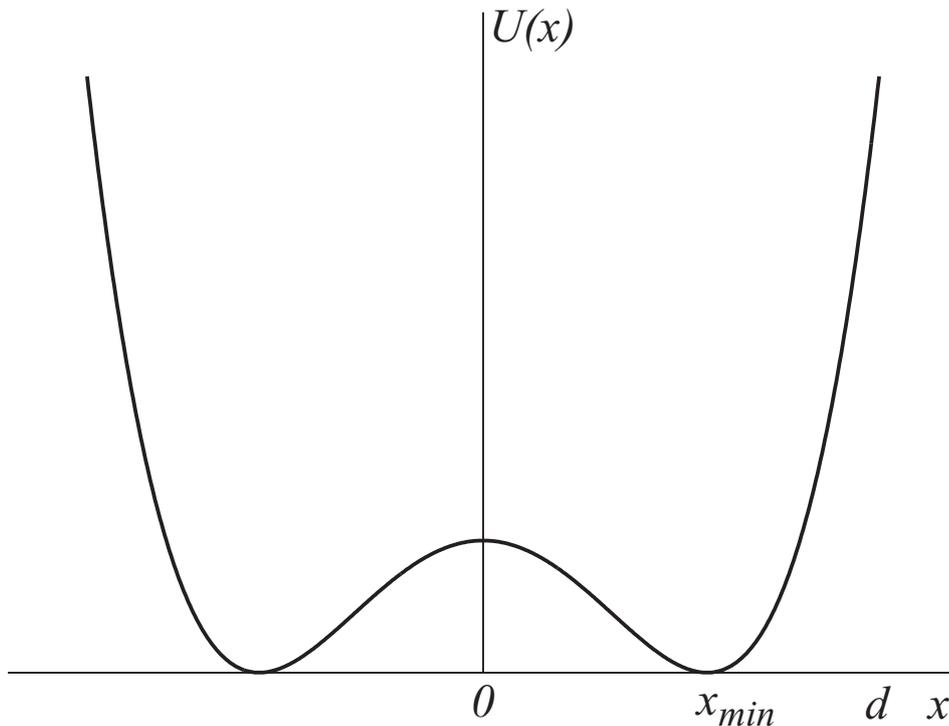


Рис. 2: Потенциальный профиль, описывающий бистабильное состояние.

Вычислим время релаксации броуновских частиц в этом потенциальном профиле (время перехода через барьер), совпадающее, в пределе малого шума по сравнению с высотой барьера, с обратным минимальным ненулевым собственным числом  $\lambda_1$ . Используя метод собственных функций, детально изложенный в [4],[7],[8],[9], будем искать решение уравнения Фоккера–Планка в следующем виде:

$$W(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (12)$$

где  $X(x)$  и  $T(t)$  - функции координаты и времени, и получим систему из двух уравнений для функций  $X(x)$  и  $T(t)$ :

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\lambda, \quad (13)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{dU(x)}{hd x} X(x) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [DX(x)] \right\} = -\lambda X(x), \quad (14)$$

где снова для простоты  $D = 2kT/h$ . Используя граничные условия и дельта-образное начальное распределение, запишем решение уравнения Фоккера–Планка в форме:

$$W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x)X_n(x_0)}{W_{st}(x_0)} e^{-\lambda_n(t-t_0)}, \quad (15)$$

где  $X_0(x) = W_{st}(x)$  и  $\lambda_0 = 0$ . Мы рассматриваем только случай, когда существует ненулевое стационарное вероятностное распределение:  $W_{st}(x) \neq 0$ , и, таким образом, должны подразумевать отражающие граничные условия  $G(\pm d) = 0$ . Анализируя выражение (15) и принимая во внимание, что собственные значения  $\lambda_n$  представляют ряд, такой, что  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , можно видеть, что экспонента с минимальным собственным числом будет спадать медленнее, чем все остальные, и будет, таким образом, отражать наибольший временной масштаб распада, равный обратному минимальному ненулевому собственному числу.

Таким образом, уравнение (14) с граничными условиями является уравнением для собственной функции  $X_n(x)$   $n$ -го порядка. Для  $X_0(x)$  уравнение (14) есть уравнение для стационарной плотности вероятности с нулевым собственным числом  $\lambda_0 = 0$  и для  $X_1(x)$  уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{kT}{h} e^{-U(x)/kT} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{U(x)/kT} X_1(x) \right] \right\} = -\lambda_1 X_1(x). \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (16) с учетом отражающих граничных условий (поток вероятности равен нулю в точках  $\pm d$ ), получим:

$$\frac{kT}{h} \frac{\partial}{\partial x} e^{U(x)/kT} X_1(x) = -\lambda_1 e^{U(x)/kT} \int_x^d X_1(z) dz. \quad (17)$$

Интегрируя это уравнение еще раз, можно получить следующее интегральное уравнение для собственной функции  $X_1(x)$ :

$$X_1(x) = e^{-U(x)/kT} \left[ e^{U(d)/kT} X_1(d) - \frac{h\lambda_1}{kT} \int_x^d e^{U(y)/kT} dy \int_y^d X_1(z) dz \right]. \quad (18)$$

Собственная функция  $X_1(x)$ , соответствующая наименьшему ненулевому собственному числу, должна быть нечетной функцией для бистабильного потенциала, т.е.  $X_1(0) = 0$ . Интегральное уравнение (18) совместно с отражающими граничными условиями определяет собственную функцию  $X_1(x)$  и собственное число  $\lambda_1$ . Можно применить итерационную процедуру, основанную на предположении, что интенсивность шума мала по сравнению с высотой потенциального барьера (эта итерационная процедура детально описана в книге Рискена [8]) и получить следующее выражение для требуемой собственной функции в приближении первого порядка:

$$\lambda_1 = (kT/h) / \int_0^d e^{U(y)/kT} dy \int_y^d e^{-U(z)/kT} dz. \quad (19)$$

Для малой интенсивности шума двукратный интеграл может быть вычислен аналитически, и в итоге можно получить следующее выражение для среднего времени перехода (обратную величину собственного числа  $\lambda_1$ ) для рассматриваемого бистабильного потенциала:

$$\tau_b = \frac{\pi h}{\sqrt{U''(x_{min})|U''(0)|}} e^{\Delta U/kT}. \quad (20)$$

Как следует из этой формулы, среднее время перехода  $\tau_b$  для бистабильного потенциала в два раза меньше, чем время Крамерса (10): поскольку мы рассматривали переход через вершину потенциального барьера  $x = 0$ , мы получили только половину.

---

- [1] H.Kramers, *Physica* **7**, 284 (1940).
- [2] P. Hanggi, P. Talkner, M. Borkovec, Reaction-rate theory: fifty years after Kramers, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 251-341 (1990).
- [3] V.I. Melnikov, The Kramers problem: Fifty years of development, *Phys. Rep.* **209**, 1-71 (1991).
- [4] R.L. Stratonovich, *Topics of the Theory of Random Noise*, New York: Gordon and Breach, 1963, p. 329.
- [5] O.Edholm, O.Leimar, *Physica A*, **98**, 313 (1979).
- [6] Н.В. Агудов, А.Н. Малахов, Влияние формы потенциального профиля метастабильного состояния на температурную зависимость его времени жизни, *Известия вузов. Прикладная Нелинейная Динамика*, **3**, №3, 80-90 (1995).
- [7] В.И. Тихонов, М.А. Миронов, *Марковские процессы* (Москва, Советское радио, 1977).
- [8] H. Risken, *The Fokker-Planck equation* (Springer Verlag, Berlin, 1985).
- [9] C.W. Gardiner, *Textbook of Stochastic methods* (Springer-Verlag, 1985).

# Случайные процессы в нелинейных системах

## Лекции 7 и 8

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН, ГСП 105,  
Нижний Новгород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

### I. ОБОБЩЕНИЕ АППАРАТА ВРЕМЕН ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ. МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДА

Как было сказано в предыдущих лекциях, для преодоления ограничения аппарата времен первого достижения, связанного с необходимостью введения поглощающих границ, использовалось определение характерного временного масштаба эволюции измеряемой величины как интеграла под кривой (когда за характерное время изменения процесса принимается длина прямоугольника с равной площадью). Однако, математическая очевидность такого определения была понята совсем недавно (см. [1]). Это позволило получать не только средние времена переходов (чем как раз и является интегральное время релаксации применительно к эволюции вероятности), но и произвольные высшие моменты времени перехода, что дает полную информацию о временной эволюции измеряемой величины, и в некоторых случаях позволяет восстановить измеряемую величину, суммируя ряд по моментам [2]. Как пример такого описания мы рассмотрим эволюцию вероятности перехода, но этот подход может быть применен для любой измеряемой величины. Далее будем называть любой временной масштаб, определенный подобным образом, как "интегральное время релаксации", но, рассматривая конкретные примеры, также будем указывать на отношение к конкретным измеряемым величинам (например, среднее время перехода или время корреляции).

#### *Вероятность перехода.*

Рассмотрим броуновскую частицу, находящуюся в начальный момент времени в точке  $x_0$ , что соответствует дельтаобразному начальному вероятностному распределению. Необходимо найти вероятность  $Q_{c,d}(t, x_0) = Q(t, x_0)$  перехода броуновской частицы из точки  $c \leq x_0 \leq d$  за границы рассматриваемого интервала  $(c, d)$  в течение времени  $t > 0$ :  $Q(t, x_0) = \int_{-\infty}^c W(x, t) dx + \int_d^{+\infty} W(x, t) dx$ . Рассматриваемая вероятность перехода  $Q(t, x_0)$  отлична от хорошо известной вероятности достижения поглощающей границы. Мы подразумеваем, что  $c$  и  $d$  являются произвольно выбранными точками произвольного потенциального профиля  $U(x)$  и граничные условия в этих точках также произвольные:  $W(c, t) \geq 0$ ,  $W(d, t) \geq 0$ .

Основным отличием вероятности перехода от вероятности первого достижения является возможность для броуновской частицы вернуться обратно в рассматриваемый интервал  $(c, d)$  после пересечения граничных точек (см., напр., [3]). Такая возможность может привести к ситуации, когда, не смотря на то, что частица уже пересекла ту или иную точку  $c$  или  $d$ , в момент времени  $t \rightarrow \infty$  данная частица может находиться внутри интервала  $(c, d)$ . Таким образом, набор событий перехода может быть не полным, т.е. в момент времени  $t \rightarrow \infty$  вероятность  $Q(t, x_0)$  может стремиться к константе, меньшей единицы:  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, x_0) < 1$ , как это имеет место в случае, когда существует стационарное распределение плотности вероятности  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t) = W_{st}(x) \neq 0$ . С другой стороны, может представлять интерес найти броуновскую частицу в момент времени  $t$  в рассматриваемом интервале  $(c, d)$   $P(t, x_0) = 1 - Q(t, x_0)$ . Далее для простоты будем называть  $Q(t, x_0)$  вероятностью распада, а  $P(t, x_0)$  – вероятностью жизни.

### *Моменты времени перехода.*

Рассмотрим вероятность  $Q(t, x_0)$  того, что броуновская частица, находившаяся в точке  $x_0$  внутри интервала  $(c, d)$  выйдет в момент времени  $t > 0$  за границы рассматриваемого интервала. Эта вероятность может быть представлена в виде разложения в ряд по моментам. С другой стороны, если все моменты известны, то в некоторых случаях вероятность может быть восстановлена в виде ряда по моментам. Таким образом, аналогично известным моментам времени первого достижения могут быть введены моменты времени перехода  $\vartheta_n(c, x_0, d)$ , принимая во внимание, что набор событий перехода в общем случае не является полным, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, x_0) < 1$ :

$$\vartheta_n(c, x_0, d) = \langle t^n \rangle = \frac{\int_0^{\infty} t^n \frac{\partial Q(t, x_0)}{\partial t} dt}{\int_0^{\infty} \frac{\partial Q(t, x_0)}{\partial t} dt} = \frac{\int_0^{\infty} t^n \frac{\partial Q(t, x_0)}{\partial t} dt}{Q(\infty, x_0) - Q(0, x_0)}. \quad (1)$$

Здесь мы можем формально обозначить производную вероятности, умноженную на нормировочный фактор, как  $w_\tau(t, x_0)$  и, таким образом, ввести плотность вероятности времени перехода  $w_{c,d}(t, x_0) = w_\tau(t, x_0)$  в следующем виде:

$$w_\tau(t, x_0) = \frac{\partial Q(t, x_0)}{\partial t} \frac{1}{[Q(\infty, x_0) - Q(0, x_0)]}. \quad (2)$$

Легко проверить, что условие нормировки выполнено при таком определении,  $\int_0^{\infty} w_\tau(t, x_0) dt = 1$ . Условием неотрицательности плотности вероятности  $w_\tau(t, x_0) \geq 0$

0 является условие монотонности вероятности  $Q(t, x_0)$ . В случае, когда  $c$  и  $d$  являются поглощающими границами, плотность вероятности времени перехода полностью совпадает с плотностью вероятности времени первого достижения  $w_T(t, x_0)$ :

$$w_T(t, x_0) = \frac{\partial Q(t, x_0)}{\partial t}. \quad (3)$$

Мы обозначаем  $w_\tau(t, x_0)$  и  $w_T(t, x_0)$  различными индексами  $\tau$  и  $T$  для того, чтобы еще раз отметить, что это две различные функции и  $w_\tau(t, x_0) = w_T(t, x_0)$  только в случае поглощающих границ. Напомним, что в наших обозначениях моменты времени первого достижения (МВПД) имеют вид:

$$T_n(c, x_0, d) = \langle t^n \rangle = \int_0^\infty t^n \frac{\partial Q(t, x_0)}{\partial t} dt = \int_0^\infty t^n w_T(t, x_0) dt.$$

Интегрируя по частям выражение (1) можно получить следующее выражение для среднего времени перехода (СВП)  $\vartheta_1(c, x_0, d) = \langle t \rangle$ :

$$\vartheta_1(c, x_0, d) = \frac{\int_0^\infty [Q(\infty, x_0) - Q(t, x_0)] dt}{Q(\infty, x_0) - Q(0, x_0)}. \quad (4)$$

Это определение полностью совпадает с характерным временным масштабом эволюции вероятности, введенным в работе [4] из геометрического рассмотрения, когда характерный масштаб времени эволюции был определен как длина равновеликого по площади прямоугольника, и то же самое определение было позднее использовано в работах [5]-[7]. Подобная идеология при определении среднего времени перехода была использована в [8]. Аналогично СВП (4) средний квадрат времени перехода  $\vartheta_2(c, x_0, d) = \langle t^2 \rangle$  может быть также определен как:

$$\vartheta_2(c, x_0, d) = 2 \frac{\int_0^\infty \left( \int_t^\infty [Q(\infty, x_0) - Q(\tau, x_0)] d\tau \right) dt}{Q(\infty, x_0) - Q(0, x_0)}. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что ранее известные временные характеристики, такие как моменты времени первого достижения, время жизни метастабильного состояния, или время релаксации к стационарному состоянию являются частными случаями моментов времени перехода (МВП), если рассматривается конкретный пример потенциального профиля: профиль с поглощающей границей, профиль, описывающий метастабильное состояние, или же профиль, при котором может существовать ненулевое стационарное распределение. Кроме того, такое общее представление моментов  $\vartheta_n(c, x_0, d)$  (1) дает возможность применить подход, предложенный А.Н.Малаховым [6],[7] для получения среднего времени перехода и обобщить этот подход для получения произвольных моментов времени

перехода (МВП) и характерных времен эволюции различных средних в произвольных потенциальных профилях, так что  $\vartheta_n(c, x_0, d)$  могут быть выражены в квадратурах как это известно для моментов времени первого достижения.

В большинстве практически важных случаев МВП являются более адекватной характеристикой, чем МВПД. Как пример, если рассмотреть распад метастабильного состояния как переход за вершину барьера, и сравнить среднее время жизни, полученное на основании определения интегрального времени релаксации (случай гладкого барьера без поглощающей границы) и среднее время первого достижения поглощающей границы, расположенной на вершине барьера, то эти временные масштабы будут отличаться в два раза даже в случае высокого потенциального барьера по сравнению с интенсивностью шума. Такое различие вызвано тем обстоятельством, что среднее время первого достижения не принимает во внимание обратный поток вероятности и таким образом эта характеристика более чувствительна к положению поглощающей границы. Для рассмотренной ситуации, если мы будем двигать границу вниз за потенциальный барьер, среднее время первого достижения увеличится в два раза и асимптотически достигнет величины соответствующего среднего времени жизни, в то время как величина среднего времени жизни практически не изменится. Такая слабая зависимость среднего времени жизни от положения граничной точки на вершине барьера или за барьером является очевидной: гораздо больше времени должно быть потрачено для того, чтобы достичь вершины потенциального барьера (термоактивационный переход), чем скатиться вниз с вершины барьера (динамическое движение).

Другим важным примером является задержка шумом распада (ЗШР) неустойчивых состояний (см. ниже Рис. 2, случай  $N$  без потенциального барьера). Ранее предполагалось, что флуктуации могут только ускорять распад неустойчивых состояний [9]. Однако, в работах [10]-[20] было показано, что существуют системы, для которых это интуитивное представление не справедливо. В частности, в системах, рассмотренных в [10]-[20] флуктуации могут значительно увеличить время распада неустойчивых и метастабильных состояний. Этот эффект может быть исследован с помощью СВПД (см., напр., [17]), но эта характеристика значительно недооценивает его [20]. Как было показано в [20], явление ЗШР возникает вследствие наличия двух механизмов. Один из них возникает из-за нелинейности потенциального профиля, описывающего неустойчивое состояние в рассматриваемой области. Вследствие этого механизма возникает резонансная зависимость СВПД от интенсивности шума. Другой механизм возникает из-за обратного потока вероятности, направленного в рассматриваемый интервал. Этот механизм не может быть описан с помощью подхода СВПД. В работах [6] и [20] асимптоти-

ческие выражения для времени распада неустойчивого состояния были получены для случая малой интенсивности шума и было показано, что если первая производная потенциального профиля отрицательна (для потенциала, ориентированного как показано на Рис. 2), флуктуации, воздействующие на динамическую систему, всегда увеличивают время распада неустойчивого состояния в пределе малой интенсивности шума.

В заключение, для дополнительного подтверждения корректности и практической полезности представленного выше определения моментов времени перехода, упомянем о дуальности СВП и СВПД. Если рассмотреть симметричный потенциальный профиль, такой, что  $U(-\infty) = U(+\infty) = +\infty$ , и получить моменты времени перехода через точку симметрии, можно видеть, что они полностью совпадают с соответствующими моментами времени первого достижения, если поглощающая граница также расположена в точке симметрии [1], [21]. Очевидно, что из равенства моментов следует, что плотность вероятности (2) совпадает с плотностью вероятности времени первого достижения:  $w_{\tau}(t, x_0) = w_T(t, x_0)$ , но этот факт легко проверить, численно решив уравнение Фоккера-Планка. Доказательство этого утверждения приведено в [1], [21].

В следующих разделах будет рассмотрен подход для получения среднего времени перехода, впервые предложенный А.Н. Малаховым в работах [6],[7] а также обобщение этого подхода для получения моментов времени перехода и времен эволюции средних как в постоянных, так и в медленно меняющихся во времени потенциальных профилях.

## II. ПОДХОД МАЛАХОВА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДА

Оригинальный подход для вычисления времен перехода был предложен Малаховым [6], [7]. Этот подход использует определение требуемого временного масштаба как интегрального времени релаксации (напр., (4)) и основан на методе преобразования Лапласа уравнения Фоккера-Планка путем получения решения в виде ряда по малому параметру Лапласа  $s$  и позволяет получить различные временные характеристики марковских процессов с постоянными во времени коэффициентами сноса и диффузии и для разнообразных граничных условий от естественных до периодических.

В данном разделе детально рассмотрим этот подход для различных типов потенциальных профилей  $u(x) = \frac{U(x)}{kT}$ . Для того, чтобы не усложнять выкладки, все результаты будут представлены для постоянных коэффициентов диффузии,  $D = 2kT/h$ , хотя все полученные результаты могут быть легко обобщены на случай произвольной зависимости  $D(x) \neq 0$  от координаты.

### А. Постановка проблемы

Удобно представить уравнение Фоккера–Планка в безразмерной форме:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{du(x)}{dx} W(x, t) \right] + \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right\}, \quad (6)$$

где  $B = 2/D = h/kT$ ,  $G(x, t)$  – поток вероятности и  $u(x) = 2U(x)/hD = U(x)/kT$  – безразмерный потенциальный профиль.

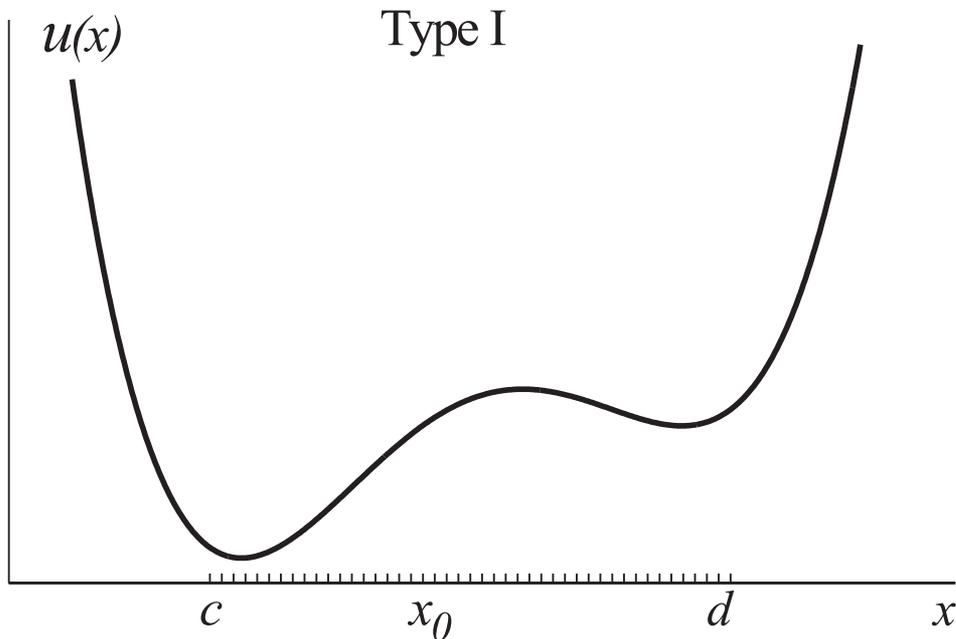


Рис. 1: Потенциальный профиль I типа.

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  все броуновские частицы находятся в точке  $x = x_0$ , что соответствует дельта-образному начальному распределению  $W(x, 0) = \delta(x - x_0)$ . Начальное распределение расплывается с течением времени и его эволюция существенно зависит от формы потенциального профиля  $u(x)$ . Рассмотрим проблему нахождения временных масштабов эволюции вероятности для трех основных типов потенциальных профилей, изображенных на Рис. 1–Рис. 3.

В потенциальном профиле первого типа (I) (см. Рис. 1), когда  $u(x)$  достаточно быстро стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , существует стационарное вероятностное распределение

$$W(x, \infty) = Ae^{-u(x)}, \quad A = 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-u(x)] dx > 0. \quad (7)$$

В этом случае нашей целью является нахождение т.н. *времени релаксации*  $\Theta$ ,

т.е. характерного временного масштаба эволюции плотности вероятности от начального  $W(x, 0)$  к финальному значению  $W(x, \infty)$  для любых  $x \neq x_0$ . С другой стороны, может представлять интерес вероятность

$$P(t, x_0) = P(t) = \int_c^d W(x, t) dx \quad (8)$$

найти изображающую точку в рассматриваемом интервале  $[c, d]$ , и найти время релаксации этой вероятности  $P(t)$ , изменяющейся от начального значения  $P(0) = \int_c^d W(x, 0) dx$  к финальному  $P(\infty) = \int_c^d W(x, \infty) dx$ .

Потенциальный профиль второго типа (II) (Рис. 2) достаточно быстро стремится к плюс бесконечности при  $x \rightarrow -\infty$  и к минус бесконечности при  $x \rightarrow +\infty$ . Потенциальный профиль третьего типа (III) (Рис. 3) спадает к минус бесконечности при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Отметим, что если рассматривается потенциальный профиль, стремящийся к плюс бесконечности при  $x \rightarrow +\infty$  и к минус бесконечности при  $x \rightarrow -\infty$ , тогда задача может быть сведена к профилю второго типа путем смены знака оси  $x$ .

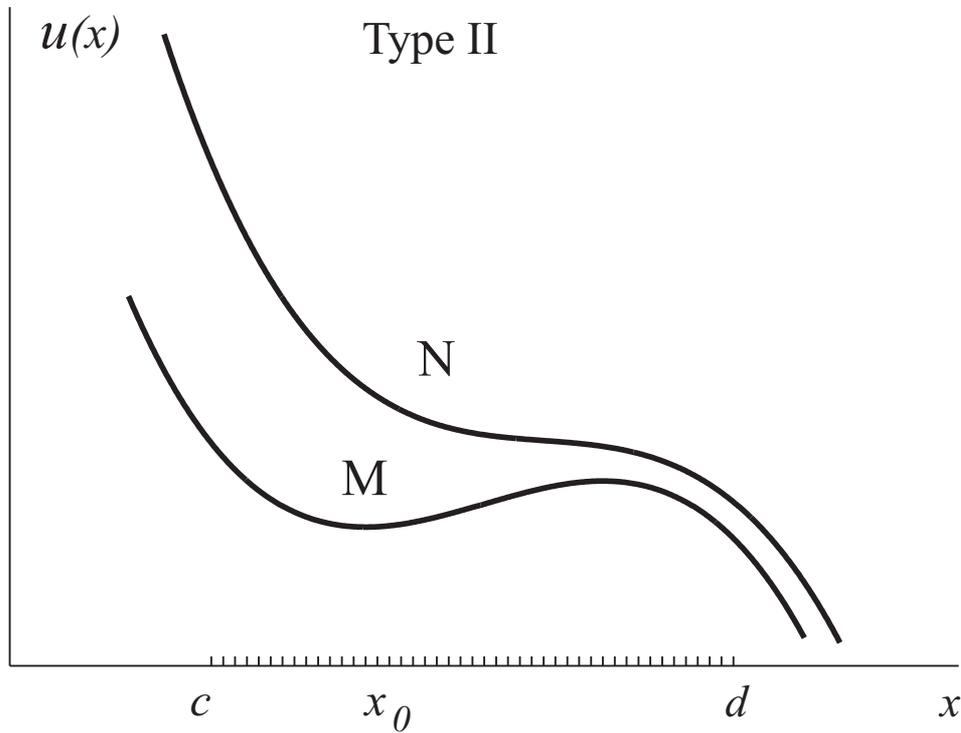


Рис. 2: Потенциальный профиль II типа с метастабильным (M) и неустойчивым (N) состояниями.

Для потенциальных профилей второго и третьего типов ненулевая стационарная плотность вероятности не существует, поскольку все диффундирующие частицы с течением времени покинут исходную область и будут двигаться по на-

правлению к областям, где потенциальный профиль  $u(x)$  стремится к минус бесконечности. В такой ситуации могут быть поставлены следующие вопросы:

1. Как долго метастабильное состояние  $M$  может существовать в рассматриваемом интервале  $[c, d]$ ?
2. Как долго неустойчивое состояние  $N$  может находиться в рассматриваемом интервале  $[c, d]$ ?

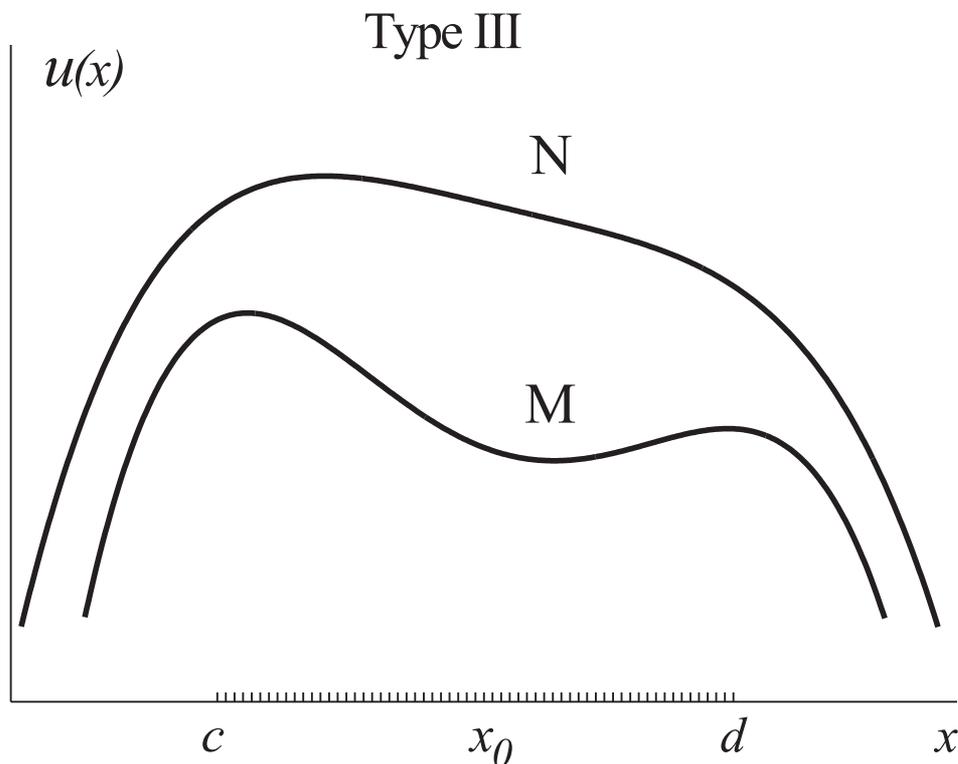


Рис. 3: Потенциальный профиль III типа с метастабильным ( $M$ ) и неустойчивым ( $N$ ) состояниями.

В первом случае является естественным определение *времени распада*  $\tau$  (или *времени жизни*  $\tau$ ) метастабильного состояния как временного масштаба эволюции вероятности (8) от начального значения  $P(0) = 1$  к финальному  $P(\infty) = 0$ .

Во втором случае будем называть временной масштаб эволюции вероятности (8) от  $P(0) = 1$  к  $P(\infty) = 0$  как *время распада*  $\tau$  неустойчивого состояния.

Все потенциальные профили, изображенные на Рис. 1–Рис. 3 вместо естественных границ в  $x \rightarrow \pm\infty$  могут, конечно же, содержать отражающие и (или) поглощающие границы. Если рассмотреть случаи с поглощающими границами, тогда мы получим средние времена первого достижения, которые имеют тот же самый смысл - это временные масштабы эволюции вероятности, т.е. СВПД ни что иное, как время распада метастабильного или неустойчивого состояния.

Определим упомянутые выше временные масштабы эволюции вероятности в

общем случае как:

$$\vartheta = \frac{\int_0^{\infty} [P(t) - P(\infty)] dt}{P(0) - P(\infty)} = \frac{\int_0^{\infty} [P(\infty) - P(t)] dt}{P(\infty) - P(0)}. \quad (9)$$

Это определение справедливо, если изменение  $P(t)$  происходит достаточно быстро, так что интеграл (9) сходится, и если  $P(t)$  при стремлении к  $P(\infty)$  не пересекает своего финального значения  $P(\infty)$ . Для выполнения последнего условия достаточно требовать монотонности изменения  $P(t)$ .

Нашей задачей является получение определенных выше временных масштабов: моментов времен перехода, а также временных масштабов эволюции различных средних в общем виде, когда требуемые результаты могут быть выражены напрямую в терминах рассматриваемого потенциального профиля  $u(x)$ .

Ниже представлено решение этой проблемы для среднего времени перехода на примере потенциального профиля II типа [6].

#### В. Основная идея метода

Введем в рассмотрение лапласовские образы плотности и потока вероятности

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} W(x, t) e^{-st} dt, \quad \hat{G}(x, s) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-st} dt. \quad (10)$$

Тогда, в соответствие с (6), (10) и начальными условиями, уравнение Фоккера–Планка может быть представлено в виде:

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{du(x)}{dx} Y(x, s) \right] - sBY(x, s) = -B\delta(x - x_0). \quad (11)$$

Преобразование Лапласа потока вероятности имеет вид:

$$\hat{G}(x, s) = -\frac{1}{B} \left[ \frac{du(x)}{dx} Y(x, s) + \frac{dY(x, s)}{dx} \right]. \quad (12)$$

В терминах преобразования Лапласа временные масштабы (9) могут быть представлены в виде:

$$\vartheta = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\hat{P}(s) - P(\infty)}{s[P(0) - P(\infty)]}, \quad (13)$$

где, в соответствии с (8),

$$\hat{P}(s) = \int_0^{\infty} P(t) e^{-st} dt = \int_c^d Y(x, s) dx.$$

Интегрируя уравнение (6) по  $x$  в пределах от  $c$  до  $d$ , получим:

$$\frac{dP(t)}{dt} = - \int_c^d \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} dx = G(c, t) - G(d, t).$$

В терминах преобразования Лапласа приходим к равенству:

$$s\hat{P}(s) - P(0) = \hat{G}(c, s) - \hat{G}(d, s). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем:

$$\vartheta = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[P(0) - P(\infty)] - [\hat{G}(d, s) - \hat{G}(c, s)]}{s[P(0) - P(\infty)]}. \quad (15)$$

Таким образом, для получения временного масштаба  $\vartheta$  требуется найти решение  $Y(x, s)$  уравнения (11) при определенных граничных условиях и вычислить предел (15) при  $s \rightarrow 0$ . Именно таким путем различные временные масштабы диффузии в кусочно-линейных и кусочно-параболических потенциальных профилях были найдены в работах [4],[5].

Но теперь мы имеем дело с произвольным потенциальным профилем  $u(x)$  в уравнении (11). Решение этого уравнения для произвольного  $u(x)$  неизвестно, что заставляет нас использовать другой подход.

Отметим, что для нашей задачи знание полного решения  $Y(x, s)$  не является необходимым, а требуется только его асимптотическое поведение при  $s \rightarrow 0$ . По этой причине разложим  $Y(x, s)$  и  $\hat{G}(x, s)$  в ряд по  $s$

$$\begin{aligned} Z(x, s) &\equiv sY(x, s) = Z_0(x) + sZ_1(x) + s^2Z_2(x) + \dots, \\ H(x, s) &\equiv s\hat{G}(x, s) = H_0(x) + sH_1(x) + s^2H_2(x) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

В соответствии с предельными теоремами преобразования Лапласа (см., напр, [23]):

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(x, s) = W(x, \infty) = W_{st}(x), \\ H_0(x) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{G}(x, s) = G(x, \infty) = G_{st}(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что стационарные значения плотности вероятности  $W_{st}(x)$  и потока вероятности  $G_{st}(x)$  могут быть получены для соответствующих граничных условий без каких либо трудностей прямо из уравнения (6).

Подставляя (16) в (15) получим:

$$\vartheta = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{[P(0) - P(\infty)] - [H_1(d) - H_1(c)]}{s[P(0) - P(\infty)]} - \frac{[H_2(d) - H_2(c)]}{[P(0) - P(\infty)]} - s \frac{[H_3(d) - H_3(c)]}{[P(0) - P(\infty)]} - \dots \right\}.$$

Здесь мы учли, что для любых потенциальных профилей стационарное значение потока вероятности равно нулю  $H_0(x) = 0$  для любых конечных  $x$ .

Как будет показано ниже, для всех потенциальных профилей выполнено следующее условие

$$H_1(d) - H_1(c) = P(0) - P(\infty). \quad (17)$$

Соответственно, требуемый временной масштаб может быть представлен в виде:

$$\vartheta = \frac{H_2(c) - H_2(d)}{P(0) - P(\infty)}. \quad (18)$$

Следовательно, для достижения нашей цели, необходимо вычислить либо функцию  $Z_2(x)$ , и через нее найти функцию  $H_2(x)$ , либо сразу вычислить  $H_2(x)$ . Можно показать, что функции  $Z(x)$  и  $H(x)$  описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{dZ_0}{dx} + u'Z_0 \right) &= 0, & a) \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{dZ_1}{dx} + u'Z_1 \right) &= BZ_0 - B\delta(x - x_0), & b) \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{dZ_2}{dx} + u'Z_2 \right) &= BZ_1, & c) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{1}{B} \left[ \frac{dZ_0}{dx} + u'Z_0 \right], & a) \\ H_1 &= -\frac{1}{B} \left[ \frac{dZ_1}{dx} + u'Z_1 \right], & b) \\ H_2 &= -\frac{1}{B} \left[ \frac{dZ_2}{dx} + u'Z_2 \right], & c) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (20)$$

Комбинируя (19) и (20) получим:

$$\begin{aligned} \frac{dH_0}{dx} &= 0, & a) \\ \frac{dH_1}{dx} &= -Z_0 + \delta(x - x_0), & b) \\ \frac{dH_2}{dx} &= -Z_1, & c) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (21)$$

откуда следуют уравнения для  $H(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{dH_0}{dx} &= 0, & a) \\ \frac{d^2H_1}{dx^2} + u' \frac{dH_1}{dx} &= BH_0 + \left( \frac{d}{dx} + u' \right) \delta(x - x_0), & b) \\ \frac{d^2H_2}{dx^2} + u' \frac{dH_2}{dx} &= BH_1, & c) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (22)$$

При решении этих уравнений необходимо принять во внимание граничные условия, разные для разных типов потенциальных профилей. Видно, что из уравнений (21b) легко получить простое выражение для  $H_1(x)$ .

### С. Основные результаты, относящиеся к временам распада.

#### *Потенциальный профиль II типа.*

Рассмотрим потенциальные профили второго типа, которые могут описывать метастабильное или неустойчивое состояние (Рис. 2), и которые стремятся к плюс бесконечности при  $x \rightarrow -\infty$  и к минус бесконечности при  $x \rightarrow +\infty$ . Граничные условия теперь имеют вид:  $G(-\infty, t) = 0$  и  $W(+\infty, t) = 0$ . По этой причине все функции  $H_k(x)$  должны принимать нулевые значения при  $x = -\infty$  и все функции  $Z_k(x)$  должны равняться нулю при  $x = +\infty$ . Для таких потенциальных профилей ненулевые стационарные распределения не существуют и, соответственно,  $Z_0(x) \equiv 0$ .

Очевидно, что в данном случае  $P(t) = \int_c^d W(x, t) dx$ , где  $c < x_0 < d$ ,  $P(0) = 1$ ,  $P(\infty) = 0$ . Из уравнения (18) следует, что (обозначая время распада метастабильного состояния или время распада неустойчивого состояния как  $\tau$ )

$$\tau = H_2(c) - H_2(d). \quad (23)$$

Из уравнения (21b) получаем  $H_1(x) = 1(x - x_0)$ , и, соответственно, условие (17) выполнено. Из уравнения (22c) можно найти

$$\frac{dH_2(x)}{dx} = e^{-u(x)} \left[ C_1 + B \int_{-\infty}^x e^{u(v)} 1(v - x_0) dv \right] \quad (24)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная.

Поскольку  $Z_1(x) = -\frac{dH_2(x)}{dx}$  должно равняться нулю при  $x = +\infty$ , получаем

$$C_1 = -B \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u(v)} 1(v - x_0) dv = -B \int_{x_0}^{+\infty} e^{u(v)} dv.$$

Соответственно, интегрирование уравнения (24) дает

$$H_2(x) = B \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-u(y)} dy \int_{-\infty}^y e^{u(v)} 1(v - x_0) dv - \int_{x_0}^{+\infty} e^{u(v)} dv \cdot \int_{-\infty}^x e^{-u(v)} dv \right\} + C_2.$$

Из условия  $H_2(-\infty) = 0$  следует, что произвольная постоянная  $C_2$  должна равняться нулю.

После некоторых преобразований получаем:

$$H_2(x) = B \begin{cases} \int_{x_0}^x e^{u(v)} dv \int_v^x e^{-u(y)} dy - \int_{x_0}^{\infty} e^{u(v)} dv \cdot \int_{-\infty}^x e^{-u(y)} dy, & x > x_0, \\ - \int_{x_0}^{\infty} e^{u(v)} dv \cdot \int_{-\infty}^x e^{-u(y)} dy, & x < x_0. \end{cases}$$

Таким образом, в соответствии с (23), принимая во внимание, что  $c < x_0 < d$ , в итоге получаем точное выражение для времени перехода броуновской частицы из рассматриваемого интервала  $[c, d]$  для произвольного потенциального профиля  $u(x)$  II типа (Рис. 3.2)

$$\tau = B \left\{ \int_{x_0}^d e^{u(v)} dv \int_c^v e^{-u(y)} dy + \int_d^{\infty} e^{u(v)} dv \cdot \int_c^d e^{-u(y)} dy \right\}. \quad (25)$$

В случае, когда в точке  $x = d$  расположена поглощающая граница, а в точке  $x = c$  - отражающая, выражение (25) переходит в известное выражение для среднего времени первого достижения:

$$\tau = B \int_{x_0}^d e^{u(v)} dv \int_c^v e^{-u(y)} dy. \quad (26)$$

Для рассматриваемого интервала  $[-\infty, d]$  время перехода (25) принимает вид:

$$\tau = T(x_0, d) + B \left\{ \int_d^{\infty} e^{u(v)} dv \cdot \int_{-\infty}^d e^{-u(y)} dy \right\}, \quad (27)$$

т.е. мы получили  $\tau > T(x_0, d)$ , поскольку переход броуновской частицы из рассматриваемого интервала происходит более быстро, если в точке  $x = d$  расположена поглощающая граница, чем в случае относительно медленно спадающего потенциального профиля (см. Рис. 2).

Как отмечалось выше, время первого достижения поглощающей границы сильно зависит от положения координаты границы, и может существенно отличаться от среднего времени перехода даже в пределе малого шума и для случая, когда граничная точка  $d$  расположена точно на вершине потенциального барьера. Рассмотрим зависимость СВП и СВПД (см. Рис. 4) от координаты граничной точки  $d$  для потенциального профиля  $U(x) = ax^2 - bx^3$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $\Delta U \approx 1.2$ ,  $c = -3$ , координата вершины барьера  $d = 2a/3b = 1.25$ . Из графика видно, что среднее время перехода слабо зависит от координаты  $d$ , а среднее время первого достижения совпадает с СВП только при больших  $d$ , когда обратным потоком частиц можно пренебречь.

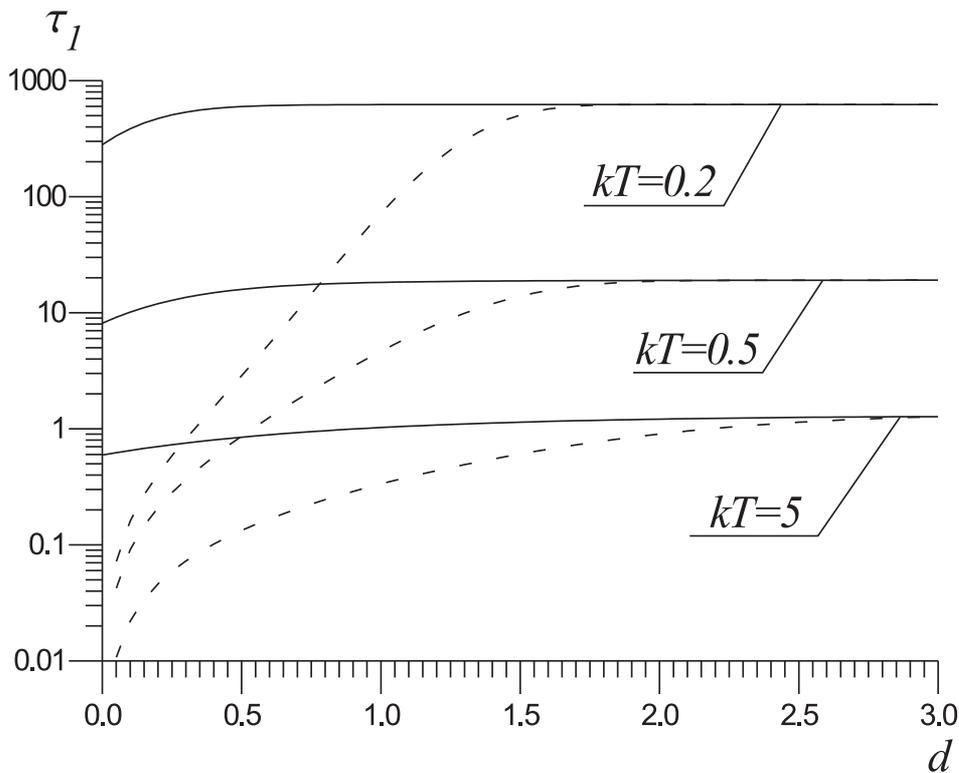


Рис. 4: Среднее время перехода (сплошная линия) и среднее время первого достижения (пунктирная линия) в потенциальном профиле  $U(x) = ax^2 - bx^3$  в зависимости от величины координаты границы  $d$ .

В силу рассмотрения далее примеров потенциальных профилей, не имеющих потенциальных барьеров, в общем случае не удастся использовать привычное обезразмеривание  $\Delta U/kT$ . Поэтому, как в данном примере, так и далее, и потенциальный профиль  $U(x)$ , и  $kT$  выражены в некоторых энергетических единицах, в каких именно, не является принципиальным, поскольку в уравнение Фоккера–Планка всегда входит их отношение  $U(x)/kT$ . Время, относительно которого будут приведены графики при исследовании временной эволюции измеряемых величин, также как и среднее время перехода на Рис. 4, измеряется в  $x^2 h/kT$ .

### III. НАХОЖДЕНИЕ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДА

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением потенциалов второго типа (в этом случае моменты времени перехода являются моментами времени жизни). Подход, рассмотренный выше для нахождения среднего времени перехода может быть обобщен для получения любых высших моментов, представленных формулой (1).

Запишем в явном виде выражения для функций  $H_n(x)$  (напомним, что  $H(x, s) = s\hat{G}(x, s) = H_0(x) + sH_1(x) + s^2H_2(x) + \dots$ ), используя граничные условия  $W(+\infty, t) = 0$  и  $G(-\infty, t) = 0$  ( $H_1(x) = 1(x - x_0)$ ):

$$\begin{aligned} H_2(x) &= -B \int_{-\infty}^x e^{-u(v)} \int_v^{\infty} e^{u(y)} 1(y - x_0) dy dv, \\ H_n(x) &= -B \int_{-\infty}^x e^{-u(v)} \int_v^{\infty} e^{u(y)} H_{n-1}(y) dy dv, \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Как нетрудно проверить, из формулы (1) (беря интеграл по частям и выполняя преобразование Лапласа, используя свойство  $P(x_0, 0) - s\hat{P}(x_0, s) = \hat{G}(d, s) - \hat{G}(c, s)$  вместе с разложением  $H(x, s)$  через  $H_n(x)$ ) можно получить следующее выражение для моментов времени жизни [22]:

$$\begin{aligned} \tau_1(c, x_0, d) &= -(H_2(d) - H_2(c)), \\ \tau_2(c, x_0, d) &= 2(H_3(d) - H_3(c)), \\ \tau_3(c, x_0, d) &= -2 \cdot 3(H_4(d) - H_4(c)), \dots \\ \tau_n(c, x_0, d) &= (-1)^n n! (H_{n+1}(d) - H_{n+1}(c)). \end{aligned} \quad (29)$$

Из этих рекуррентных соотношений можно получить следующее выражение для второго момента для случая  $c = -\infty$  ( $c < x_0 < d$ ):

$$\begin{aligned} \tau_2(-\infty, x_0, d) &= 2 \{ [\tau_1(-\infty, x_0, d)]^2 + \\ &+ B^2 \int_{-\infty}^d e^{-u(x)} dx \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{u(v)} \int_d^v e^{-u(y)} \int_y^{\infty} e^{u(z)} dz dy dv - \\ &- B^2 \int_{x_0}^d e^{-u(x)} \int_{x_0}^x e^{u(v)} \int_d^v e^{-u(y)} \int_y^{\infty} e^{u(z)} dz dy dv dx \}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\tau_1(-\infty, x_0, d)$  является первым моментом:

$$\begin{aligned} \tau_1(-\infty, x_0, d) &= B \left\{ \int_{-\infty}^d e^{-u(x)} dx \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{u(v)} dv - \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_0}^d e^{-u(x)} \int_{x_0}^x e^{u(v)} dv dx \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

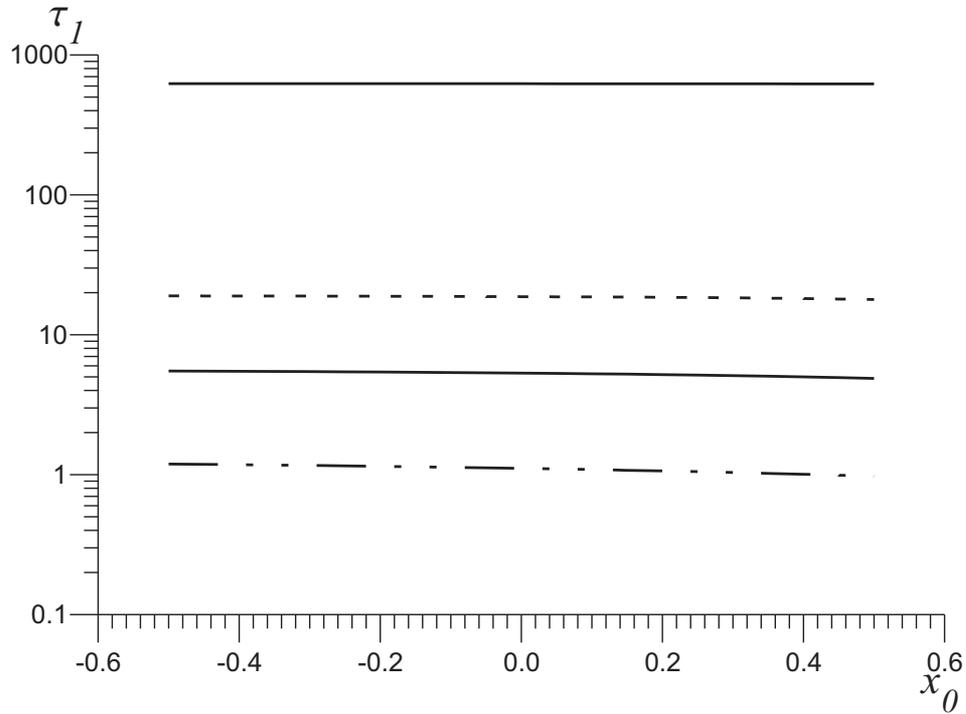


Рис. 5: Среднее время перехода в потенциальном профиле  $U(x) = ax^2 - bx^3$  в зависимости от координаты начального распределения  $x_0$ . Сверху вниз:  $kT = 0.2$ ,  $kT = 0.5$ ,  $kT = 1$ ,  $kT = 5$ .

Проведем исследование зависимости среднего времени перехода и отношения второго момента к удвоенному квадрату первого момента  $\tau_2/(2\tau_1^2)$  от координаты начального дельта-образного распределения  $x_0$  для потенциального профиля  $U(x) = ax^2 - bx^3$  при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $\Delta U \approx 1.2$ ,  $c = -3$ ,  $d = 2a/3b$ . На Рис. 5 представлена зависимость СВП (31) от  $x_0$ . Видно, что в достаточно широких пределах изменения  $x_0$  от  $-0.5$  до  $0.5$  изменение  $\tau_1(-\infty, x_0, d)$  незначительно, в то время, как высота потенциального профиля в точках  $\pm 0.5$  сравнима с высотой потенциального барьера. На Рис. 6 представлена зависимость отношения второго момента времени перехода  $\tau_2(c, x_0, d)$  к удвоенному квадрату первого момента  $\tau_1(c, x_0, d)$ . Видно, что для рассматриваемого случая потенциального профиля это отношение близко к единице и при малых и при больших значениях шума (наибольшее отклонение наблюдается при интенсивности шума порядка высоты потенциального барьера), а также оно слабо зависит от координаты начального дельта-образного распределения, особенно в пределе малого шума. Поскольку анализ третьего и высших моментов представляет существенную трудность, в следующем разделе проведем анализ временной эволюции вероятности жизни метастабильного состояния, принимая во внимание взаимосвязь первого и второго моментов  $\tau_2/(2\tau_1^2) \approx 1$ .

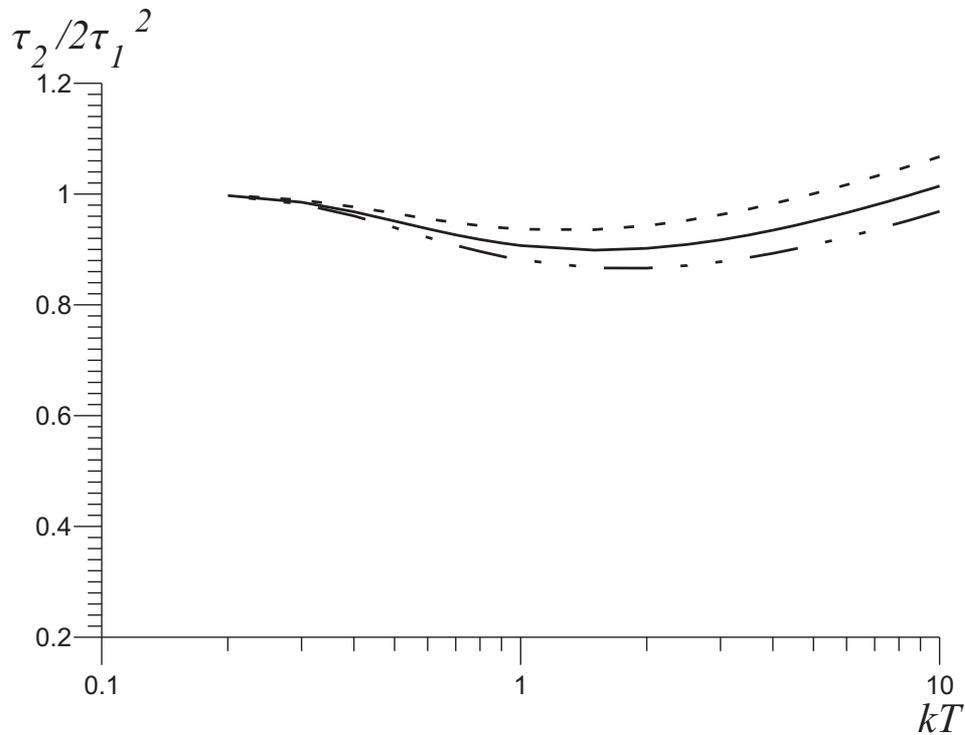


Рис. 6: Отношение моментов времени перехода  $\tau_2/(2\tau_1^2)$  в потенциальном профиле  $U(x) = ax^2 - bx^3$  в зависимости от интенсивности шума  $kT$  для трех различных значений  $x_0$ . Сверху вниз:  $x_0 = 0.3$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = -0.3$ .

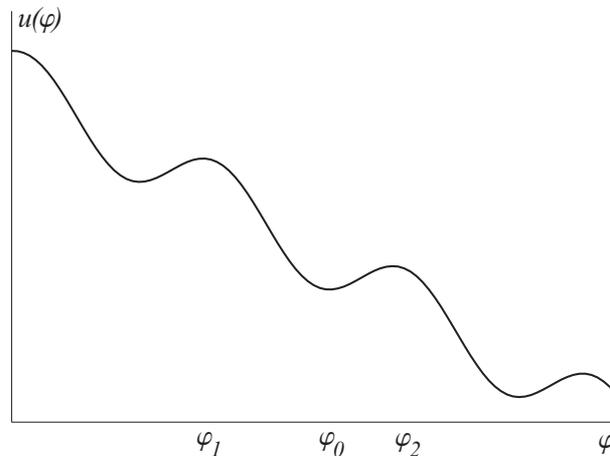


Рис. 7: Вид потенциального профиля  $u(\varphi) = 1 - \cos \varphi - i\varphi$ .

#### IV. ПРИМЕР. МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Рассмотрим, как будут вести себя первые два кумулянта времени перехода марковского процесса в периодическом потенциальном профиле  $u(\varphi) = 1 - \cos \varphi - i\varphi$ , см. Рис. 7. Данный профиль соответствует типу II. Из полученных выражений для моментов времени перехода (25), (30) можно построить графики для среднего и среднеквадратического отклонения (СО) времени перехода  $\sigma = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$ .

На Рис. 8 представлены зависимости среднего времени перехода от интенсивности шума при разных значениях наклона потенциала  $i$ . Точками на кривых

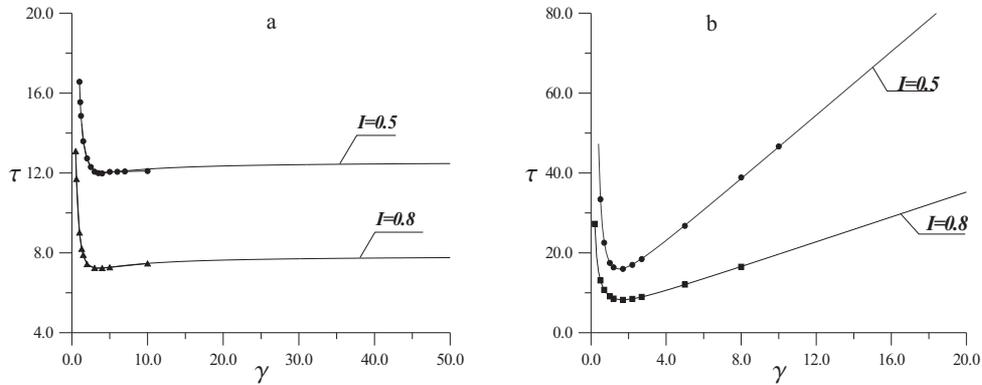


Рис. 8: Зависимость среднего времени перехода от интенсивности шума на интервале  $(-\pi, \pi)$  (а) и на интервале  $(-\infty, \pi)$  (б).

показаны результаты численного моделирования уравнения Ланжевена с шумом. Как видно из графиков, аналитические и численные результаты полностью совпадают. Как следует из полученных результатов, среднее время перехода имеет минимум как функция интенсивности шума, т.е. распад метастабильного состояния при некотором оптимальном значении шума происходит наиболее быстро. При большой интенсивности шума среднее время перехода описывается следующей асимптотической формулой [6]:

$$\tau \approx \frac{1}{\omega_c} \left[ \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{i} + \frac{\gamma}{i^2} \{1 - e^{i(\varphi_1 - \varphi_0)/\gamma}\} \right]. \quad (32)$$

Если рассматриваемый интервал конечен, то при увеличении интенсивности шума среднее время стремится к постоянной величине, не зависящей от интенсивности шума:

$$\tau \approx \frac{1}{\omega_c} \left[ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{i} \right]. \quad (33)$$

Если же рассматриваемый интервал является полубесконечным, то среднее время перехода стремится к бесконечности при стремлении к бесконечности интенсивности шума.

На Рис. 9 представлены зависимости среднеквадратического отклонения от интенсивности шума при разных значениях тока. Как видно из графиков, также как и СВП, среднеквадратическое отклонение является немонотонной функцией интенсивности шума: при интенсивности шума много меньшей потенциального барьера СО стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что при слабых флуктуациях разность фаз дольше находится в потенциальном минимуме и редко перескакивает через барьер. В этом случае применима следующая асимптотическая формула для моментов [22]:

$$\tau_n(\varphi_0) = n! \tau_1^n(\varphi_0), \quad \Delta u \gg \gamma,$$

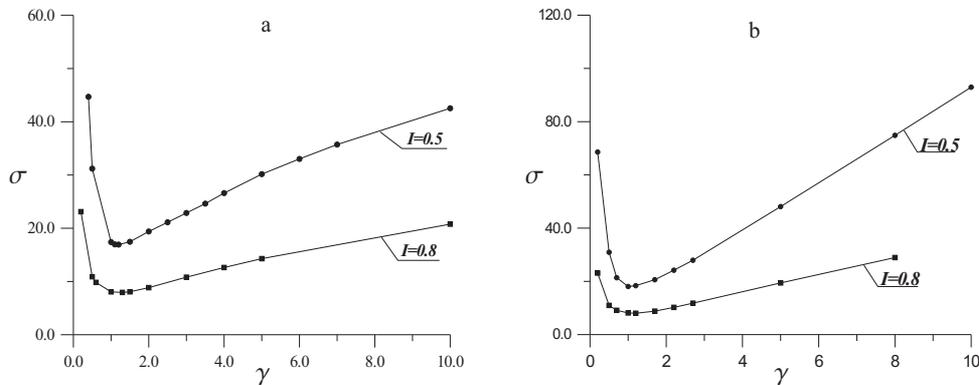


Рис. 9: Зависимость среднеквадратического отклонения времени перехода от интенсивности шума на интервале  $(-\pi, \pi)$  (а) и на интервале  $(-\infty, \pi)$  (б).

где  $\tau_1$  - среднее время перехода и  $\tau_n$  -  $n$ -ый момент времени перехода. При интенсивности шума намного превышающей потенциальный барьер, средний квадрат возрастает, т.к. сильные флуктуации забрасывают разность фаз обратно в рассматриваемый интервал. А при некоторой оптимальной интенсивности флуктуаций эта функция имеет минимум, т.е. процесс перехода является наименее случайным. Похожее немонотонное поведение среднеквадратического отклонения как функции интенсивности шума наблюдалось в работе [24] для среднеквадратического отклонения времени первого достижения границы. Но в работе [24]  $\text{CO}$  сначала имеет минимум, потом возрастает, а далее опять уменьшается. В нашем случае  $\text{CO}$  после достижения минимума монотонно возрастает с увеличением интенсивности шума, что объясняется различным асимптотическим поведением потенциальных профилей - для периодического потенциального профиля при увеличении интенсивности шума наблюдается переход к процессу свободной диффузии.

## V. ВРЕМЕННЫЕ МАСШТАБЫ ЭВОЛЮЦИИ СРЕДНИХ

Аналогично, рассмотренный подход может быть применен для получения временных масштабов эволюции средних [25] и времен корреляции [26],[27]. Будем искать среднее  $m_f(t)$  в форме:

$$m_f(t) = \langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)W(x, t)dx. \quad (34)$$

Как было упомянуто выше, уравнение Фоккера-Планка (6) является уравнением непрерывности. Для получения необходимого среднего  $m_f(t)$  (34), умножим это уравнение на функцию  $f(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тогда мы

получим:

$$\frac{dm_f(t)}{dt} = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} dx. \quad (35)$$

Это уже обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка ( $f(x)$  является известной детерминированной функцией), но, к сожалению, неизвестно как найти функцию  $G(x, t)$ .

Определим характерный масштаб временной эволюции среднего  $m_f(t)$  как интегральное время релаксации:

$$\tau_f(x_0) = \frac{\int_0^{\infty} [m_f(t) - m_f(\infty)] dt}{m_f(0) - m_f(\infty)}. \quad (36)$$

Определение (36), как и использованные ранее, является общим в том смысле, что оно справедливо для любых начальных условий. Но в данном случае мы ограничим себя дельта-образным начальным распределением и будем рассматривать  $\tau_f(x_0)$  как функцию координаты начального распределения  $x_0$ . Для произвольных начальных условий требуемая временная характеристика может быть получена из  $\tau_f(x_0)$  путем отдельного усреднения числителя и знаменателя  $m_f(0) - m_f(\infty)$  по начальным условиям, поскольку  $m_f(0)$  также является функцией  $x_0$ .

Ограничения определения (36) остаются теми же, как и ранее: оно дает корректные результаты только для монотонно изменяющихся функций  $m_f(t)$  и  $m_f(\infty)$  должно достаточно быстро достигать своего стационарного значения  $m_f(\infty)$  для того, чтобы интеграл в (36) сходился.

Выполняя преобразование Лапласа формулы (36) и уравнения (35) (преобразование Лапласа (35) дает:  $sm_f(s) - m_f(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\partial \hat{G}(x, s) / \partial x] dx$ , где  $m_f(s) = \int_0^{\infty} m_f(t) e^{-st} dt$ .) и комбинируя их, получаем:

$$\begin{aligned} \tau_f(x_0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sm_f(s) - m_f(\infty)}{s[m_f(0) - m_f(\infty)]} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{m_f(0) - m_f(\infty) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\partial \hat{G}(x, s) / \partial x] dx}{s[m_f(0) - m_f(\infty)]}. \end{aligned} \quad (37)$$

где функция  $\hat{G}(x, s)$  является преобразованием Лапласа потока вероятности  $\hat{G}(x, s) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-st} dt$ .

Вводя функцию  $H(x, s) = s\hat{G}(x, s)$  и разлагая ее в ряд по  $s$ , ограничим наши вычисления членом  $H_2(x)$ , поскольку можно показать, что:

$$\tau_f(x_0) = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dH_2(x)}{[m_f(0) - m_f(\infty)]}. \quad (38)$$

Как нетрудно найти, для рассматриваемого типа потенциальных профилей функция  $H_2(x)$  имеет следующий вид:

$$H_2(x) = B \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-u(v)} \int_{-\infty}^v e^{u(y)} [1(y - x_0) - F(y)] dy dv - \right. \\ \left. - F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(v)} \int_{-\infty}^v e^{u(y)} [1(y - x_0) - F(y)] dy dv \right\}, \quad (39)$$

где

$$F(u) = \int_{-\infty}^u e^{-u(v)} dv / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(v)} dv. \quad (40)$$

Подставляя конкретную форму функции  $H_2(x)$  (39) в формулу (38), получим искомый характерный масштаб временной эволюции произвольного среднего  $m_f(t)$  для произвольного потенциального профиля, такого что  $u(\pm\infty) = \infty$ :

$$\tau_f(x_0) = \frac{B}{m_f(0) - m_f(\infty)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-u(x)} \int_{x_0}^x e^{u(y)} F(y) dy dx - \right. \\ \left. - A \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-u(x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u(x)} \int_{x_0}^x e^{u(y)} F(y) dy dx + \right. \\ \left. + A \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-u(x)} dx \int_{x_0}^{\infty} e^{-u(x)} \int_{x_0}^x e^{u(y)} dy dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x) e^{-u(x)} \int_{x_0}^x e^{u(y)} dy dx \right\}, \quad (41)$$

где функция  $F(x)$  имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u(v)} dv / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(v)} dv. \quad (42)$$

и  $A = 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(x)} dx$ .

Аналогично, время корреляции как время эволюции корреляционной функции  $K_x(t) = \langle x(t')x(t'+t) \rangle$  [26] или же время корреляции более общей функ-

ции  $K_f(t) = \langle f(x(t'))f(x(t'+t)) \rangle$  (в работе [27] было найдено время корреляции  $\sin(x(t))$ ) может быть получено.

- 
- [1] A.L. Pankratov, On certain time characteristics of dynamical systems driven by noise, *Phys. Lett. A*, 234, №5, 329-335 (1997).
- [2] А.Н. Малахов, Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований, М.: Советское Радио, 376 с. (1978).
- [3] J. Luis Garsia-Palacios, Fr.J. Lazaro, Langevin-dynamics study of the dynamical properties of small magnetic particles, *Phys. Rev. B*, 58, №2, 14937-14958 (1998).
- [4] N.V. Agudov, A.N. Malakhov, Nonstationary diffusion through arbitrary piecewise-linear potential profile. Exact solution and time characteristics, *Radiophys. Quantum Electron.*, 36, №2, 97-109 (1993).
- [5] A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, Exact solution of the Kramers' problem for piece-wise parabolic potential profiles, *Physica A*, 229, №1, 109-126 (1996).
- [6] Malakhov, A.N. Influence of thermal fluctuations on time characteristics of single Josephson element with high damping. Exact solution / A.N. Malakhov, A.L. Pankratov. // *Physica C*. - 1996. - Vol. 269, №1-2. - P. 46-54.
- [7] Malakhov, A.N. Time scales of overdamped nonlinear Brownian motion in arbitrary potential profiles. / A.N. Malakhov. // *Chaos*. - 1997. - Vol.7, №3. - P. 488-504.
- [8] W. Nadler, K. Schulten, Generalized moment expansion for Brownian relaxation processes, *J. Chem. Phys.*, 82, №1, 151-160 (1985).
- [9] P. Colet, M. San Miguel, J. Casademunt, J.M. Sancho, Relaxation from a marginal state in optical bistability, *Phys. Rev. A*, 39, №1, 149-156 (1989).
- [10] J.E. Hirsch, B. A. Huberman, D. V. Scalapino, Theory of intermittency, *Phys. Rev. A*, 25, №1, 519-532 (1982).
- [11] I. Dayan, M. Gitterman, G. H. Weiss, Stochastic resonance in transient dynamics, *Phys. Rev. A*, 46, №2, 757-761 (1992).
- [12] Gitterman, M. "Escape" of a periodically driven particle from a metastable state in a noisy system / M. Gitterman, G. H. Weiss. // *J. Stat. Phys.* - 1993. - Vol. 70, №1-2. - P. 107-123.
- [13] Casado, J.M. Distribution of escape times in a driven stochastic model / J.M. Casado, M. Morillo. // *Phys. Rev. E*. - 1994. - Vol. 49, №2. - P. 1136-1139.
- [14] Mantegna, R.N. Noise Enhanced Stability in an Unstable System / R.N. Mantegna, B. Spagnolo. // *Phys. Rev. Lett.* - 1996. - Vol. 76, №4. - P. 563-566.
- [15] Mantegna, R.N. Probability Distribution of the Residence Times in Periodically Fluctuating Metastable Systems / R.N. Mantegna, B. Spagnolo. // *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* - 1998. - Vol. 8, №4. - P. 783-790.
- [16] Agudov, N.V. On the effect of fluctuations on an intermittent laminar motion / N.V. Agudov, A. N. Malakhov. // *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* - 1995. - Vol. 5, №2. - P. 531-536.
- [17] Agudov, N.V. Noise delayed decay of unstable states / N.V. Agudov. // *Phys. Rev. E*. - 1998. - Vol. 57, №3. - P. 2618-2625.
- [18] Frankowicz, M. Transient evolution towards a unique stable state: Stochastic analysis of explosive behavior in a chemical system / M. Frankowicz, G. Nicolis. // *J. Stat. Phys.* - 1983. - Vol. 33, №3. - P. 595-609.
- [19] Iwaniszewski, J. Transient multimodality for the decay of unstable states / J. Iwaniszewski. // *Phys. Rev. A*. - 1992. - Vol. 45, №12. - P. 8436-8440.
- [20] Agudov, N.V. Decay of unstable equilibrium and nonequilibrium states with inverse probability current taken into account / N.V. Agudov, A.N. Malakhov. // *Phys. Rev. E*. - 1999. - Vol. 60, №6. - P. 6333-6342.
- [21] А.Н. Малахов, А.Л. Панкратов, Точное значение времени релаксации динамической системы с шумом, описываемой произвольным симметричным потенциальным профилем, *Известия ВУЗов. Радиофизика*, 38, №3-4, 256-261 (1995).
- [22] A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, Evolution times of probability distributions and averages - Exact solutions of the Kramers' problem, *Adv. Chem. Phys.*, 121, 357-438 (2002).
- [23] Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования (Москва, Наука, 1971); G.Doetsch, Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation (R.Oldenbourg, Munchen, 1961).
- [24] Н.В. Агудов и А.В. Сафонов, Актуальные проблемы статистической радиофизики, **2**, 118 (2003).
- [25] A.L. Pankratov, Time evolution of averages in dynamical systems driven by noise, *Phys. Lett. A*, 255, №1-2, 17-22 (1999).
- [26] A.A. Dubkov, A.N. Malakhov, A.I. Saichev, Correlation time and structure of the correlation function of nonlinear equilibrium brownian motion in arbitrary-shaped potential wells, *Radiophys. Quantum Electron.*, 43, №4, 335-346 (2000).
- [27] A.A. Antonov, A.L. Pankratov, A.V. Yulin, J. Mygind, Influence of thermal fluctuations on Cherenkov radiation from fluxons in dissipative Josephson systems, *Phys. Rev. B*, 61, №14, 9809-9819 (2000).

# Случайные процессы в нелинейных системах. Лекции 9 и 10

## Временная эволюция измеряемых величин

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН, ГСП 105,  
Нижний Новгород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

### 1. ПОСТОЯННЫЕ ВО ВРЕМЕНИ ПОТЕНЦИАЛЫ

Известно, что когда переход броуновской частицы происходит через потенциальный барьер, достаточно высокий по сравнению с интенсивностью шума  $\Delta U/kT \gg 1$ , временная эволюция многих наблюдаемых величин (напр., вероятность перехода, или функция корреляции) может быть описана простой экспоненциальной функцией  $\sim \exp(-t/\tau)$  [1],[2], где  $\tau$  – соответствующий временной масштаб (среднее время перехода, или время корреляции). Такое представление измеряемых величин очевидно, например, из метода разложения решения уравнения Фоккера-Планка по собственным функциям (например, среднее время перехода может быть представлено в виде  $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x_0) \int_c^d X_n(x) dx}{\lambda_n W_{st}(x_0)}$ ). В этом случае соответствующий временной масштаб (среднее время перехода) дает полную информацию об эволюции вероятности. Границы применимости экспоненциального приближения для эволюции вероятности изучались в работах [3],[4]. В [3] авторы обобщили среднее время первого достижения на случай ”радиационных” граничных условий и для двух примеров диффузии в отсутствие потенциальных барьеров показали хорошее совпадение между экспоненциальным приближением и численно полученной эволюцией вероятности. В более общем случае экспоненциальное поведение измеряемых величин было продемонстрировано в работе [4] для релаксационных процессов в системах, имеющих стационарные состояния. Используя подход ”приближения обобщенных моментов” авторы работы [4] получили точное выражение для среднего времени релаксации к стационарному состоянию и для частного случая прямоугольной потенциальной ямы продемонстрировали хорошее совпадение экспоненциального приближения с численно полученными измеряемыми величинами. Однако, в простейшем примере прямоугольной потенциальной ямы, рассмотренном в [4], потенциальный барьер отсутствовал, и авторы той работы предположили, что их подход также должен давать хорошее приближение в задачах с диффузионным переходом через потенциальные барьеры.

Давайте на ряде примеров проанализируем границы применимости экспоненциального приближения для описания временной эволюции измеряемых величин

при различной, как малой, так и большой, интенсивности воздействующего шума по сравнению с высотой потенциальных барьеров [9],[7],[8],[6].

#### А. Временная эволюция вероятности жизни метастабильного состояния

Проведем анализ временной эволюции вероятности  $P(t, x_0)$  того, что броуновская частица, находившаяся в точке  $x_0$  в начальный момент времени ( $t = 0$ ) внутри интервала  $(c, d)$  может быть найдена в момент времени  $t > 0$  внутри рассматриваемого интервала:  $P(t, x_0) = \int_c^d W(x, t) dx$  (вероятность жизни). Мы предполагаем, что  $c$  и  $d$  – произвольно выбранные точки произвольного потенциального профиля  $u(x)$ , а граничные условия заданы в точках  $c_b \ll c$  и  $d_b \gg d$ , и ограничимся в рассмотрении потенциальными профилями II типа.

Соответствующие моменты времени жизни были получены в предыдущей лекции. Момент  $n$ -го порядка может быть представлен в следующей форме:

$$\tau_n(c, x_0, d) = n! \tau_1^n(c, x_0, d) + r_n(c, x_0, d). \quad (1)$$

Это естественное представление  $\tau_n(c, x_0, d)$ , которое следует из структуры рекуррентных формул (29) лекции 8, что особенно хорошо видно из формы первого и второго моментов, представленных выражениями (31), (30). Используя подход, предложенный в работе [10] для анализа моментов времени первого достижения, можно показать, что в предельном случае высокого барьера  $\Delta u \gg 1$  ( $\Delta u = \Delta U/kT$  – высота безразмерного потенциального барьера) можно пренебречь остаточными членами  $r_n(c, x_0, d)$  в формуле (1). Однако, для  $\Delta u \approx 1$  должен быть проведен сложный детальный анализ для оценки  $r_n(c, x_0, d)$ . Предположим, что остаточными членами  $r_n(c, x_0, d)$  можно пренебречь в широкой области параметров (см. результаты анализа второго момента, представленные на Рис. 6 лекции 8), и численно проверим в дальнейшем, когда наше предположение применимо.

Кумулянты [11],[1] времени жизни  $\varkappa_n$  являются гораздо более удобными характеристиками, чем моменты, для нашей цели восстановления временной эволюции вероятности  $P(t, x_0)$ , которая является интегральным преобразованием ранее введенной плотности вероятности времени жизни (времени перехода)  $w_\tau(t, x_0)$ . В отличие от представления в виде ряда по моментам, преобразование Фурье плотности вероятности  $w_\tau(t, x_0)$  – характеристическая функция – разложенная в ряд по кумулянтам, может быть обратно трансформирована в плотность вероятности.

Аналогично тому, как были получены квадратурные формулы для моментов

(1), подобные выражения могут быть получены и для кумулянтов  $\mathfrak{x}_n$ :

$$\mathfrak{x}_n(c, x_0, d) = (n - 1)! \mathfrak{x}_1^n(c, x_0, d) + R_n(c, x_0, d). \quad (2)$$

Известно, что характеристическая функция  $\Theta(\omega, x_0) = \int_0^\infty w_\tau(t, x_0) e^{j\omega t} dt$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) может быть представлена как ряд по кумулянтам ( $w_\tau(t, x_0) = 0$  для  $t < 0$ ):

$$\Theta(\omega, x_0) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{x}_n(c, x_0, d)}{n!} (j\omega)^n \right]. \quad (3)$$

В случае, когда остаточными членами  $R_n(c, x_0, d)$  в формуле (2) можно пренебречь (что эквивалентно пренебрежению  $r_n(c, x_0, d)$  в (1)), ряд (3) может быть просуммирован и найдено его обратное преобразование Фурье:

$$w_\tau(t, x_0) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}, \quad (4)$$

где  $\tau$  – среднее время жизни [49],[50] ( $\tau(c, x_0, d) \equiv \tau_1 \equiv \mathfrak{x}_1$ ):

$$\tau(c, x_0, d) = B \left\{ \int_{x_0}^d e^{u(x)} \int_c^x e^{-u(v)} dv dx + \int_d^\infty e^{u(x)} dx \int_c^d e^{-u(v)} dv \right\}. \quad (5)$$

Вероятно, подобная процедура была ранее использована (см. [10]) для суммирования ряда по моментам времени первого достижения, когда экспоненциальное распределение плотности вероятности времен первого достижения было обнаружено в предельном случае высокого потенциального барьера по сравнению с интенсивностью шума.

Интегрируя плотность вероятности (4), получим следующее выражение для вероятности жизни метастабильного состояния  $P(t, x_0)$  ( $P(0, x_0) = 1$ ,  $P(\infty, x_0) = 0$ ):

$$P(t, x_0) = \exp(-t/\tau), \quad (6)$$

где среднее время жизни  $\tau$  представлено выражением (5). Вероятность (6) представляет собой хорошо известный экспоненциальный распад метастабильного состояния для случая высокого потенциального барьера [2]. Интересно узнать, где же находится граница применимости экспоненциального приближения (6) и когда остаточными членами  $r_n$  and  $R_n$  в формулах (1),(2) можно пренебречь. Для ответа на этот вопрос рассмотрим три примера потенциальных профилей, имеющих метастабильные состояния и сравним полученную численно эволюцию вероятности жизни метастабильного состояния  $P(t, x_0) = \int_c^d W(x, t) dx$  с ее экспоненциальным приближением (6). Для численного решения УФП был использован метод

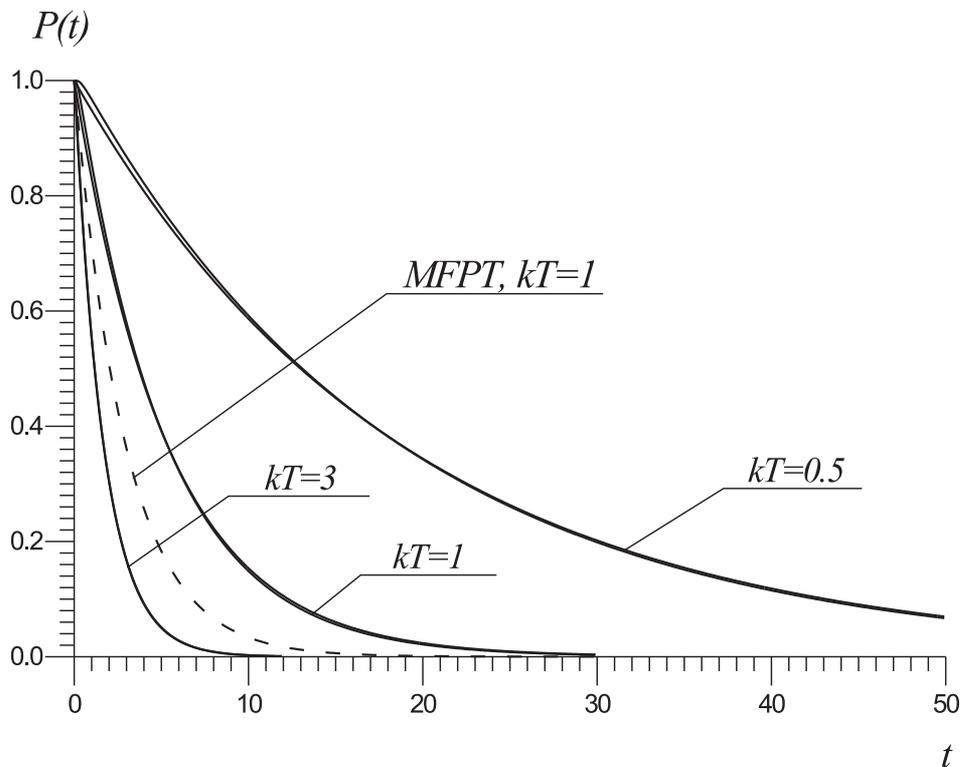


Рис. 1: Эволюция вероятности для потенциала  $U(x) = ax^2 - bx^3$ .

Крэнка-Никольсон, предполагая что отражающая граница  $G(c_b, t) = 0$  ( $c_b < c$ ) расположена гораздо левее и выше потенциального минимума, а поглощающая граница  $W(d_b, t) = 0$  ( $d_b > d$ ) расположена гораздо правее и ниже вершины потенциального барьера, вместо естественных граничных условий на плюс/минус бесконечности, так что влияние этих фантомных границ в точках  $c_b$  и  $d_b$  на процесс диффузии было пренебрежимо малым. Во всех примерах, рассмотренных применительно к эволюции вероятности, расположим начальное распределение в минимуме потенциального профиля для того, чтобы избавиться от сносовой компоненты эволюции вероятности, которая, как очевидно, не является экспоненциальной, хотя оказывает достаточно слабое влияние на эволюцию вероятности, как следует из проведенного анализа, см. Рис. 4,5 лекции 8.

Первая система описывается потенциальным профилем  $U(x) = ax^2 - bx^3$ . Были взяты следующие параметры:  $a = 2$ ,  $b = 1$ , что приводит к высоте барьера  $\Delta U \approx 1.2$ ,  $c = -2$ ,  $d = 2a/3b$ , и  $kT = 0.5; 1; 3$  (в компьютерных вычислениях мы задали  $h = 1$ ). Как и ранее, потенциальный профиль  $U(x)$  и  $kT$  выражены в некоторых энергетических единицах, а время, относительно которого приведены графики, измеряется в единицах  $x^2 h/kT$ . Соответствующие кривые результатов численного счета эволюции вероятности и ее экспоненциального приближения изображены на Рис. 1. В наихудшем случае при  $kT = 1$  максимальное разли-

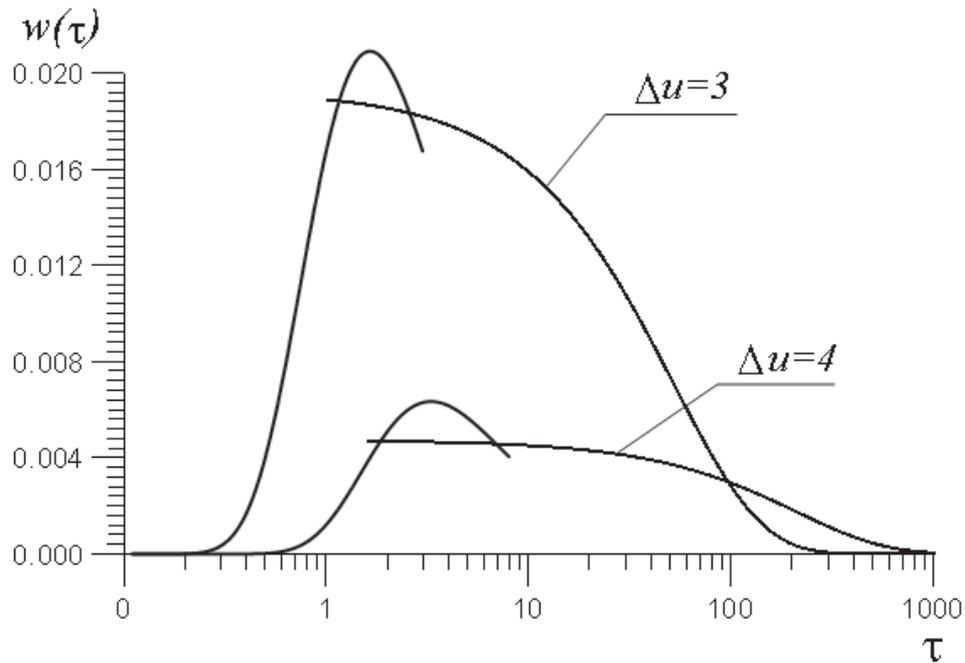


Рис. 2: Плотность вероятности времени перехода, сшивка двух асимптотик.

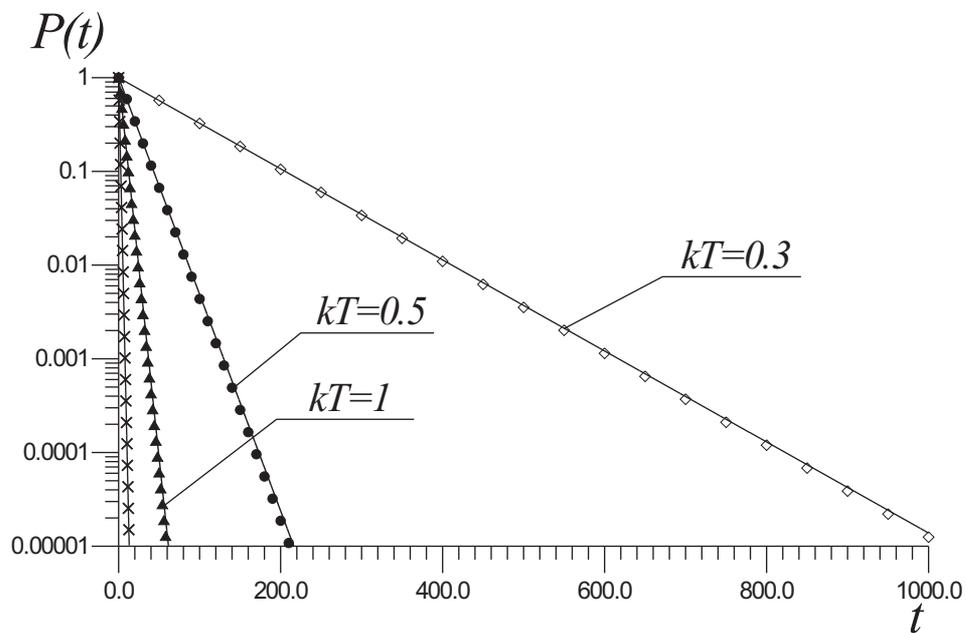


Рис. 3: Эволюция вероятности для потенциала  $U(x) = ax^2 - bx^3$ , логарифмический масштаб. Крестиками изображена кривая  $kT = 5$ .

чие между соответствующими кривыми составляет 3.2%. Для сравнения также приведена кривая экспоненциального приближения с средним временем первого достижения точки  $d$ , подставленным в экспоненту для  $kT = 1$  (пунктирная линия). Как хорошо видно, в последнем случае ошибка экспоненциального приближения значительно больше. Из данного графика видно, что на малых време-

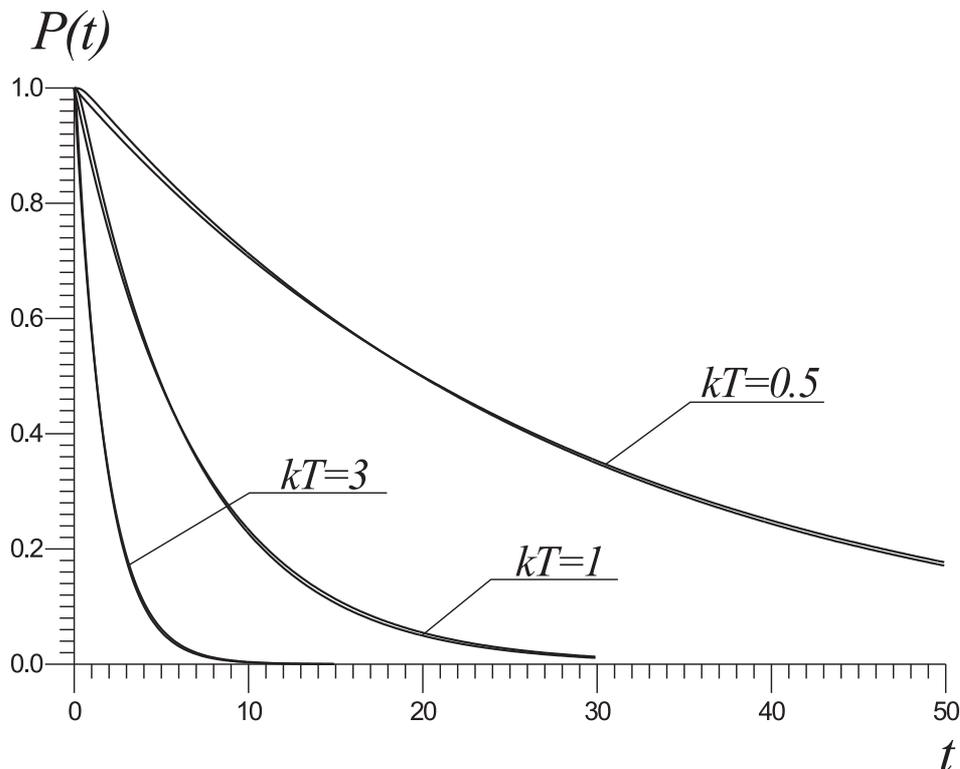


Рис. 4: Эволюция вероятности для потенциала  $U(x) = ax^4 - bx^5$ .

нах, много меньше чем  $\tau$ , вероятность имеет полку, и вообще говоря, экспонентой не описывается. Что же происходит на таком масштабе времен? Это лучше видно не на самой вероятности переходов, а на ее производной - плотности вероятности времен перехода  $w(t)$ . Что интересно, используя метод преобразования Лапласа и асимптотические разложения при  $s \rightarrow \infty$  это плотность вероятности можно описать аналитически, если потенциальный профиль параболический. На Рис. 2 представлен график плотности вероятности времен перехода путем сшивки двух асимптотик, при больших и малых временах. Начальный этап соответствует установлению дельта-образного начального распределения в потенциальной яме, после чего начинается экспоненциальный распад метастабильного состояния.

Если построить график зависимости вероятности жизни в логарифмическом масштабе, то видно, что вплоть до  $P(t) = 10^{-5}$ , чего вполне достаточно для решения прикладных задач, эволюция вероятности прекрасно описывается экспоненциальным приближением даже при больших шумах (кривая  $kT = 5$  на Рис. 3 изображена крестиками). Важно отметить, что при этом корректно воспроизводится даже эволюция вероятности на больших временах. Это говорит о том, что полученное рассматриваемым здесь способом время перехода является оценкой обратной величины минимального ненулевого собственного числа. Действительно, если рассмотреть простейший пример прямоугольного потенциального про-

филя, имеющего отражающие стенки в точках 0 и  $L$  [4], для которого может быть аналитически получена функция Грина:

$$W(x, t) = 1/L + (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(n\pi)^2 t / (L^2 B)] \cos(\pi n x / L) \cos(\pi n x_0 / L), \quad (7)$$

где  $B = 2/D$ , то обратное минимальное ненулевое собственное число равно  $\lambda_1^{-1} = L^2 B / \pi^2$ . Для данного случая могут быть вычислены и время установления к стационарному распределению, как время выхода за границу  $L/2$ , при дельта-образном начальном распределении, находящемся в  $x = 0$ , так и время корреляции [4]. Для времени релаксации получаем  $\tau_{rel} = L^2 B / 8$ , для времени корреляции  $\tau_{cor} = L^2 B / 10$ . Как видно, оба временных масштаба практически совпадают с  $\lambda_1^{-1}$  и, таким образом, достаточно хорошо описывают асимптотику соответствующих измеряемых величин при больших временах наблюдения.

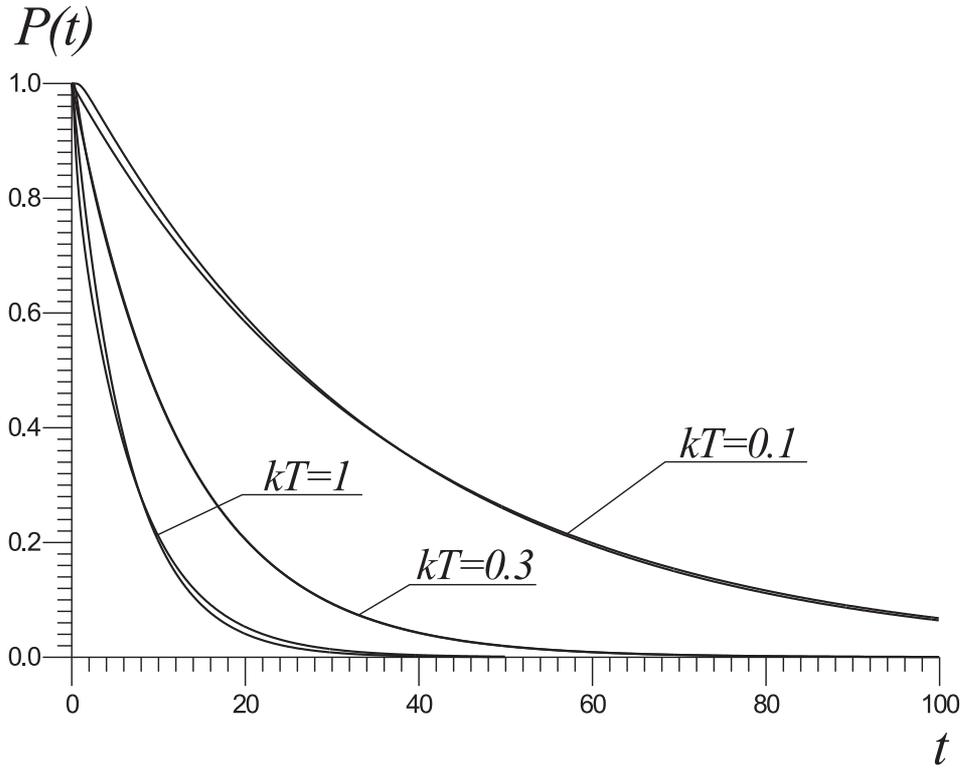


Рис. 5: Эволюция вероятности для потенциала  $U(x) = 1 - \cos(x) - ax$ ,  $a = 0.85$ .

Второй случай описывается потенциальным профилем  $U(x) = ax^4 - bx^5$ . Были взяты следующие параметры:  $a = 1$ ,  $b = 0.5$  что приводит к высоте барьера  $\Delta U \approx 1.3$ ,  $c = -1.5$ ,  $d = 4a/5b$ , и  $kT = 0.5; 1; 3$ . Соответствующие кривые результатов численного счета эволюции вероятности и ее экспоненциального приближения изображены на Рис. 4. В наихудшем случае ( $kT = 1$ ) максимальное различие между соответствующими кривыми составляет 3.4%.

Третий случай описывается потенциальным профилем  $U(x) = 1 - \cos(x) - ax$ . Этот потенциал является мультистабильным. Мы рассмотрели его в интервале  $[-10, 10]$ , когда процесс диффузии протекает между тремя соседними потенциальными минимумами. Было взято значение  $a = 0.85$  что привело к высоте барьера  $\Delta U \approx 0.1$ ,  $c = -\pi - \arcsin(a)$ ,  $d = \pi - \arcsin(a)$ ,  $x_0 = \arcsin(a)$ , и  $kT = 0.1; 0.3; 1$ . Соответствующие кривые результатов численного счета эволюции вероятности и ее экспоненциального приближения изображены на Рис. 5. В отличие от двух предыдущих примеров данный потенциальный профиль был рассмотрен на существенно большем интервале и с более низким потенциальным барьером. В этом случае различие между соответствующими кривыми численного счета и экспоненциального приближения больше, но, тем не менее, качественное совпадение достаточно хорошее.

В отличие от двух предыдущих примеров, при диффузии в периодическом потенциальном профиле, асимптотикой на больших временах является процесс свободной диффузии, с некоторым эффективным коэффициентом диффузии, обратно пропорциональным высоте потенциального барьера. Очевидно, что на больших временах эволюция вероятности уже не будет экспоненциальной. Однако, как показано в работе [12, 13], переход к процессу свободной диффузии происходит за время, пропорциональное  $e^{2\alpha}$ , где  $\alpha$  - высота потенциального барьера, в то время, как распад метастабильного состояния - на временах, пропорциональных  $e^\alpha$ . Для того, чтобы понять, при какой интенсивности шума экспоненциальное приближение эволюции вероятности становится неприменимым, данный потенциальный профиль был рассмотрен на более значительном интервале  $[-50, 50]$ , и при  $a = 0.5$  (как и ранее,  $c = -\pi - \arcsin(a)$ ,  $d = \pi - \arcsin(a)$ ,  $x_0 = \arcsin(a)$ ).

Как видно из графиков на Рис. 6, вплоть до интенсивностей шума больше или порядка высоты потенциального барьера и до вероятности  $P(t) = 10^{-5}$  экспоненциальное приближение дает хорошее описание распада метастабильного состояния, а при больших интенсивностях шума заметно значительное отклонение от экспоненциального поведения эволюции вероятности, что объясняется переходом к процессу свободной диффузии. С другой стороны, при рассмотрении подобных систем на больших временах, представляет интерес уже не эволюция вероятности нахождения в потенциальном минимуме, которая становится малой, а различные функции корреляции и спектры. Например, при решении задачи о спектре напряжения джозефсоновского контакта, находящегося в сверхпроводящем состоянии, что соответствует эволюции марковского процесса в потенциальном профиле  $U(x) = 1 - \cos(x) - ax$ ,  $a < 1$ , представляет интерес функция корреляции  $K_V[\tau] = \langle \dot{x}(t + \tau)\dot{x}(t) \rangle = \langle \sin(x(t + \tau)) \sin(x(t)) \rangle$ . В этом случае, временная эво-

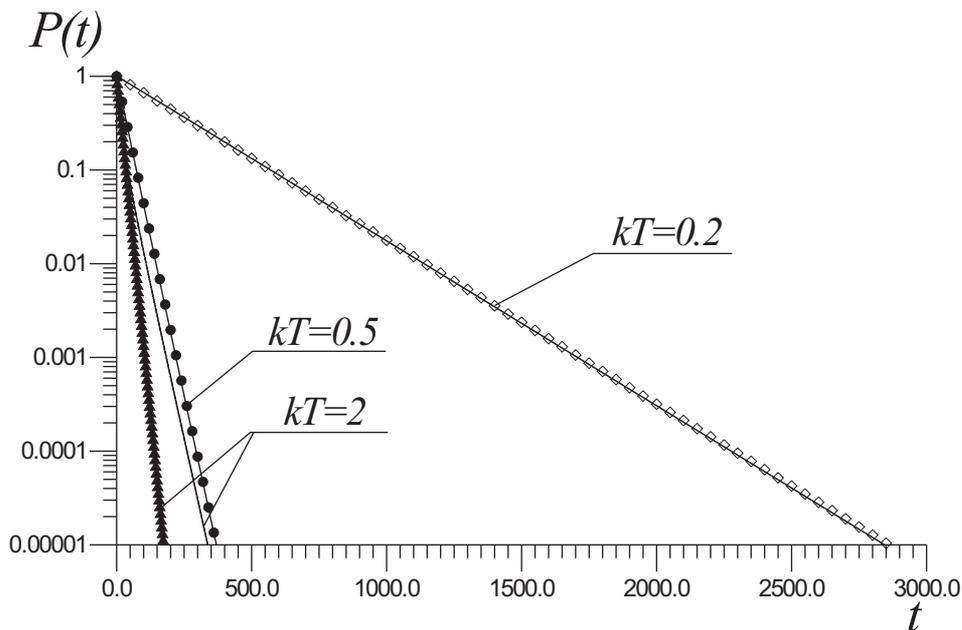


Рис. 6: Эволюция вероятности для потенциала  $U(x) = 1 - \cos(x) - ax$ ,  $a = 0.5$ , логарифмический масштаб.

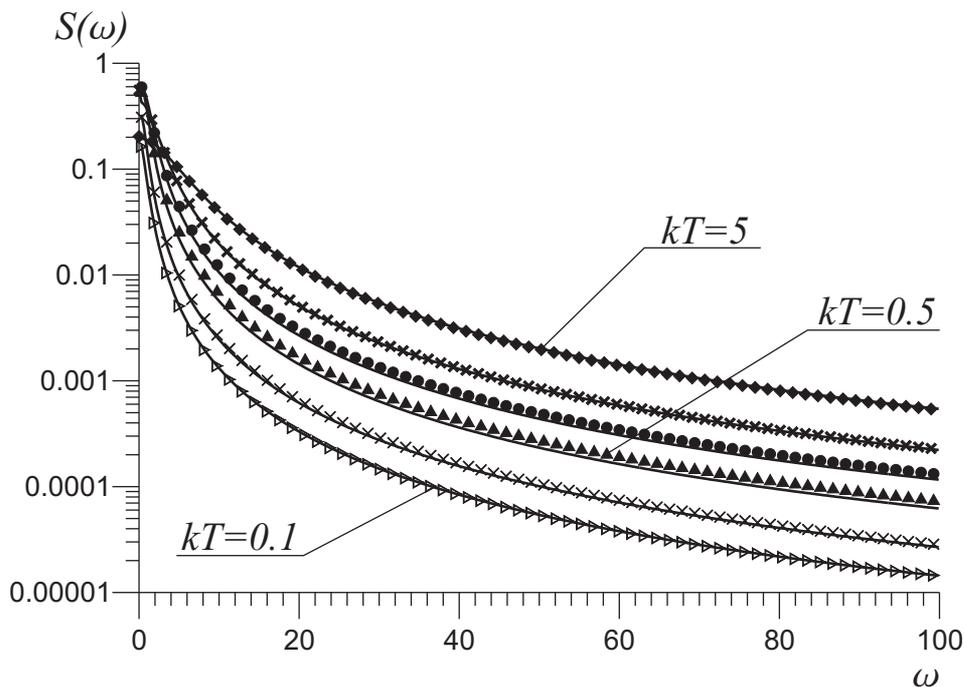


Рис. 7: Спектральная плотность мощности процесса  $dx(t)/dt$  в потенциальном профиле  $U(x) = 1 - \cos(x) - ax$ ,  $a = 0.5$ , логарифмический масштаб.

люция функции корреляции  $K_V[\tau]$  также близка к экспоненциальной, а ее фурье образ - спектральная плотность мощности, близка к Лоренцевой форме. Интересно отметить, что наибольшее отклонение от Лоренцевой формы наблюдается при интенсивностях шума порядка высоты потенциального барьера (см. Рис. 7), хотя оно является достаточно малым.

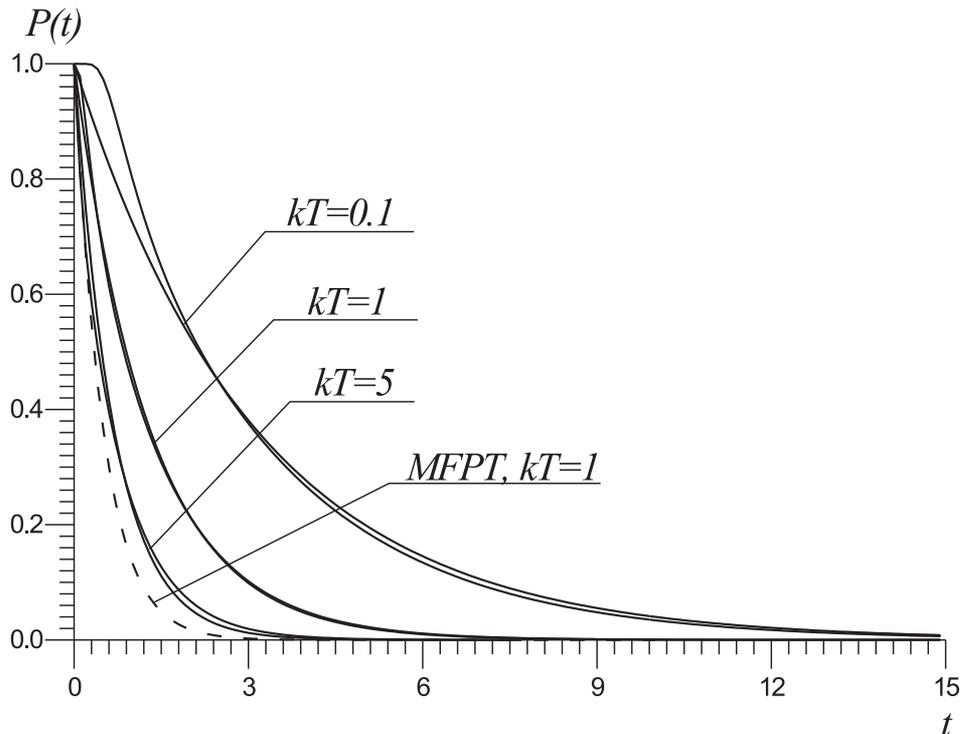


Рис. 8: Эволюция вероятности для потенциала  $U(x) = -bx^3$ .

В заключение, был рассмотрен пример метастабильного состояния, не имеющего потенциального барьера:  $U(x) = -bx^3$ , где  $b = 1$ ,  $x_0 = -1$ ,  $d = 0$ ,  $c = -3$  и  $kT = 0.1; 1; 5$ . Пунктирной кривой изображено экспоненциальное приближение со средним временем первого достижения точки  $d$  для  $kT = 1$  (Рис. 8). Как видно, даже для такого примера экспоненциальное приближение (со средним временем жизни (5)) дает адекватное описание эволюции вероятности, и это приближение работает лучше для больших интенсивностей шума.

### В. Временная эволюция средних

Если требуемый временной масштаб эволюции среднего известен, среднее можно представить в виде:

$$m_f(t) = (m_f(0) - m_f(\infty)) \exp(-t/\tau_f(x_0)) + m_f(\infty). \quad (8)$$

Ниже мы проверим применимость данной формулы для нескольких примеров временной эволюции средней координаты  $m(t) = \langle x(t) \rangle$ .

Как пример приведенного выше описания рассмотрим временную эволюцию средней координаты марковского процесса:

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x, t)dx. \quad (9)$$

Характерный временной масштаб эволюции средней координаты может быть получен из формулы (41) предыдущей лекции, подставляя  $x$  вместо  $f(x)$ . Но для симметричных потенциальных профилей  $u(x) = u(-x)$  выражение для временного масштаба эволюции средней координаты существенно упрощается ( $m(\infty) = 0$ ):

$$\tau_m(x_0) = \frac{B}{x_0} \left\{ \int_0^{+\infty} x e^{-u(x)} dx \cdot \int_0^{x_0} e^{u(y)} dy + \int_0^{x_0} x e^{-u(x)} \int_{x_0}^x e^{u(y)} dy dx \right\}. \quad (10)$$

Как легко проверить, при  $x_0 = 0$ , получаем  $\tau_m(x_0) = 0$ .

Рассмотрим теперь несколько примеров симметричных потенциальных профилей и проверим применимость экспоненциального приближения:

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = x_0 \exp(-t/\tau_m(x_0)). \quad (11)$$

Прежде всего, рассмотрим временную эволюцию средней координаты в моностабильном параболическом потенциале  $u(x) = ax^2/2$  (что соответствует линейной системе), поскольку для этого случая временная эволюция среднего известна:

$$m_{par}(t) = x_0 \exp(-at/B), \quad (12)$$

где  $a = a'/kT$  и  $B = h/kT$ , так что для линейной системы  $\tau_{par} = B/a$  и не зависит от интенсивности шума и координаты начального распределения  $x_0$ . С другой стороны,  $\tau_m(x_0)$  описывается выражением (10). Подставляя параболический потенциал в формулу (10), производя несложные вычисления и меняя порядок интегрирования, можно показать, что  $\tau_m(x_0) = B/a = h/a' = \tau_{par}$ , т.е. для чисто параболического потенциала время эволюции среднего (10) не зависит ни от интенсивности шума, ни от координаты начального распределения  $x_0$ , как это и должно быть. Этот факт еще раз подтверждает правильность используемого метода.

Второй рассмотренный пример описывается моностабильным потенциальным профилем четвертого порядка:  $u(x) = ax^4/4$ . В этом нелинейном случае применимость экспоненциального приближения существенно зависит от положения начального распределения и интенсивности шума. Тем не менее, экспоненциальное приближение временной эволюции среднего дает качественно правильные результаты и может быть использовано в качестве первого приближения в широкой области параметров (см. Рис. 9,  $a = 1$ ). Более того, если мы будем увеличивать интенсивность шума, то увидим, что ошибка экспоненциального приближения

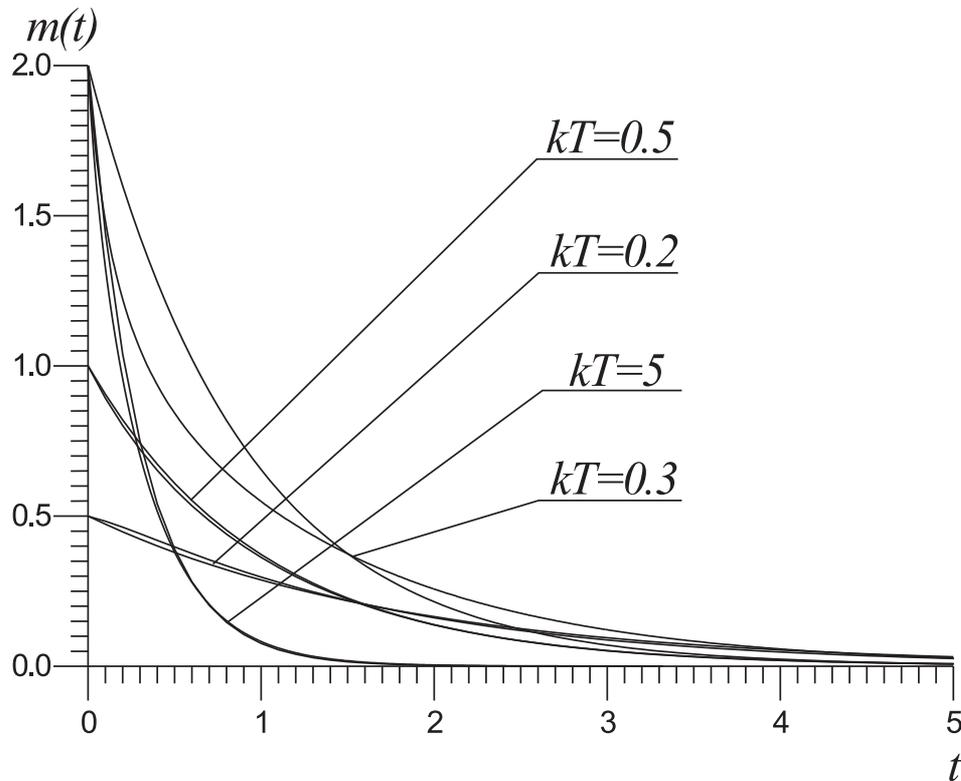


Рис. 9: Эволюция средней координаты в потенциале  $U(x) = x^4/4$ .

уменьшается и для  $kT = 50$  экспоненциальное приближение фактически совпадает с результатами численного моделирования (см. Рис. 10, представленный в логарифмическом масштабе,  $a = 1$ ,  $x_0 = 3$ ). Таким образом, можно сделать вывод, что нелинейная система "линеаризуется" шумом большой интенсивности - эффект, который интуитивно очевиден, но должен быть исследован далее путем анализа дисперсии и высших кумулянтов вероятностного распределения системы.

Третий рассмотренный пример описывается бистабильным потенциальным профилем, т.н. "quartic" потенциалом:  $u(x) = ax^4/4 - bx^2/2$ . В этом случае применимость экспоненциального приближения также существенно зависит от координаты начального распределения. Если  $x_0$  находится далеко от потенциального минимума, то существует два характерных временных масштаба: быстрое динамическое скатывание в потенциальный минимум и медленный индуцированный шумом переход через потенциальный барьер. В этом случае одноэкспоненциальное приближение дает не очень адекватное описание временной динамики среднего, однако может быть использовано в качестве первого приближения. Но если  $x_0$  совпадает с координатой потенциального минимума, то экспоненциальное приближение всего на несколько процентов отличается от результатов численного моделирования даже в случае, когда интенсивность шума существенно превышает

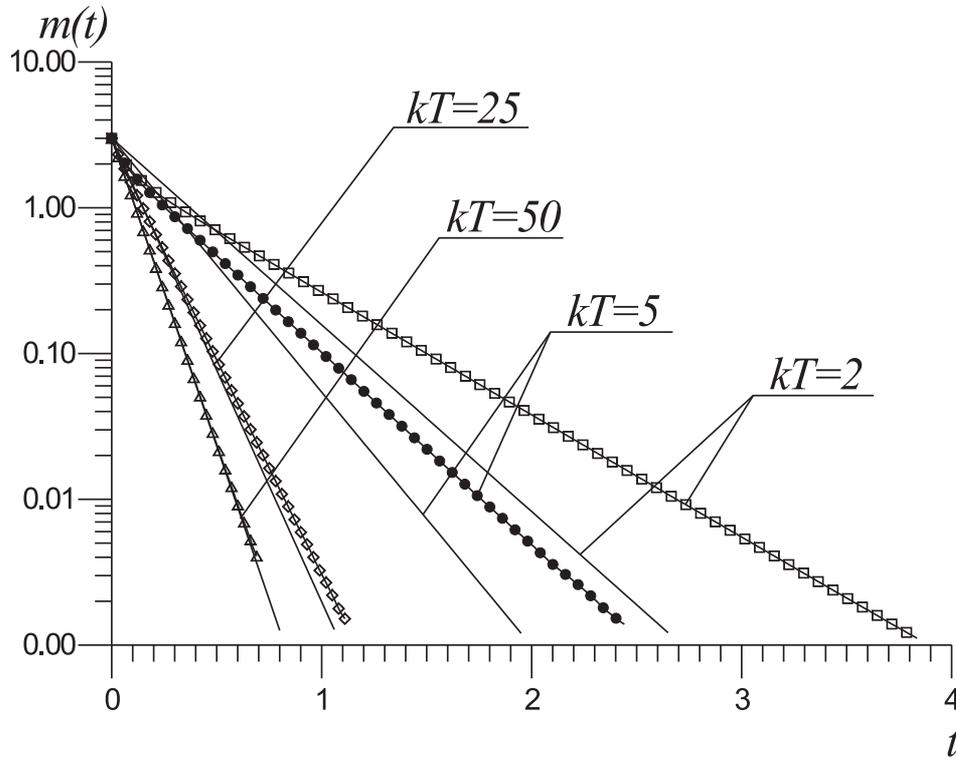


Рис. 10: Эволюция средней координаты в потенциале  $U(x) = x^4/4$  (логарифмический масштаб).

ет высоту потенциального барьера (см. Рис. 11,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $x_0 = 1.414$ ). Однако, если начальное распределение расположено далеко от потенциального минимума, но интенсивность шума велика, то опять, как и в предыдущем примере, существенная нелинейность потенциала будет подавлена сильными флуктуациями (при большой интенсивности шума система перестает чувствовать потенциальный барьер) и эволюция средней координаты марковского процесса станет экспоненциальной (см. Рис. 12, представленный в логарифмическом масштабе,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $x_0 = 2.5$ ).

### С. Обсуждение применимости экспоненциального приближения

Временное поведение функции корреляции было исследовано в работе [8] при рассмотрении частного случая функции корреляции величины  $\sin x(t)$  в периодическом потенциальном профиле с периодическими граничными условиями. В этом случае использование одноэкспоненциального приближения дало адекватное описание измеряемой величины (см. также Рис. 7, где представлена спектральная плотность мощности  $\sin x(t)$ ). На основании большого числа проанализированных случаев можно представить следующие выводы о возможности использования одноэкспоненциального приближения:

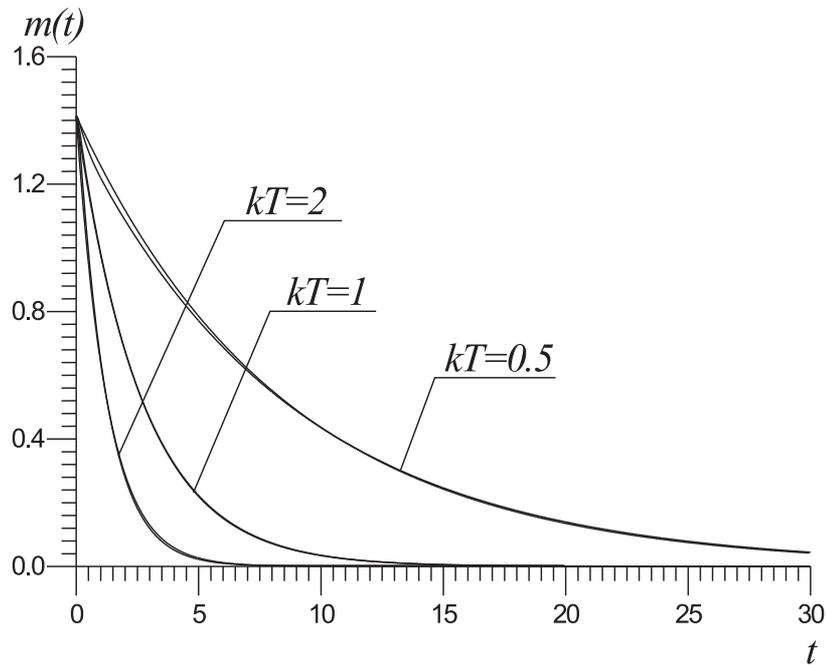


Рис. 11: Эволюция средней координаты в потенциале  $U(x) = x^4/4 - x^2$  при начальном распределении, находящемся в потенциальном минимуме.

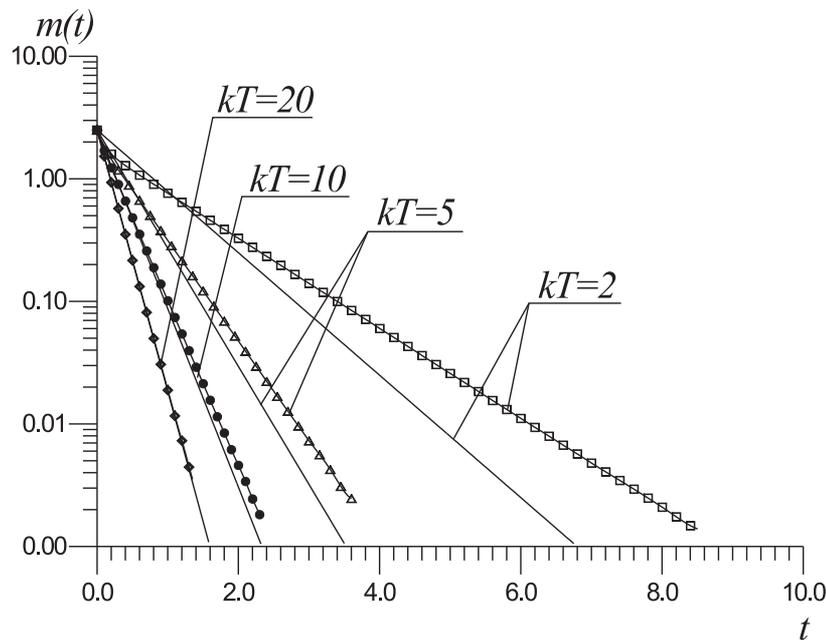


Рис. 12: Эволюция средней координаты в потенциале  $U(x) = x^4/4 - x^2$  при начальном распределении, находящемся далеко от потенциального минимума (логарифмический масштаб).

1. Одноэкспоненциальное приближение работает особенно хорошо для измеряемых величин, которые слабо чувствительны к положению начального распределения, таких как вероятности переходов и функции корреляции.
2. Во всех остальных случаях обычно достаточно использование двухэкспонен-

циального приближения для описания временной эволюции измеряемой величины с высокой степенью точности, и в этом случае удобно воспользоваться двусторонним приближением Паде, как предложено в работе [4].

3. Экспоненциальное приближение может привести к значительной ошибке при описании измеряемых величин в случае, когда интенсивность шума мала, а потенциальный профиль имеет заметный наклон при отсутствии потенциального барьера, что соответствует чисто динамическому движению, слегка возмущенному флуктуациями. С другой стороны, как было обнаружено во всех рассмотренных примерах, одноэкспоненциальное приближение является более адекватным для процессов, активированных шумом: либо это активационные переходы через потенциальные барьеры, либо движение в присутствии интенсивных флуктуаций.

## II. ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРОФИЛИ

Исследование нелинейных динамических систем, подверженных одновременно воздействию шума и периодического сигнала является важной темой во многих областях физики. В последние десятилетия в таких системах было обнаружено много интересных явлений, таких как резонансная активация [14], стохастический резонанс [15],[16], "рэтчет" эффект [17, 18], увеличенная шумом стабильность неустойчивых систем [19] и индуцированная полем стабилизация активационных процессов [20]. В частности, для систем с малым затуханием, подверженным периодическому воздействию, известен эффект резонансной активации, который изучался во многих работах (см. [14] и список литературы в этом обзоре). Это явление выражается в уменьшении времени жизни метастабильного состояния в определенной области частот воздействующего сигнала. Для систем с большим затуханием (чья динамика описывается непрерывными марковскими процессами), явление резонансной активации было обнаружено для случая стохастически изменяющихся потенциальных барьеров, чья высота флуктуирует в соответствие с некоторым вероятностным распределением [21]-[25], и, совсем недавно, для барьеров, которые либо детерминированно переключаются между двумя состояниями [25] либо подвержены периодическому синусоидальному воздействию [20]. Однако, в случае детерминированного воздействия исследование было ограничено областью малых амплитуд сигнала.

Применение методов, рассмотренных в предыдущей лекции, совместно с адиабатическим приближением позволяет исследовать различные характеристики марковских процессов, подверженных внешнему воздействию. Использование точных средних времен перехода (вместо приближенного времени Крамерса) помогает получить аналитическое описание эволюции вероятности для произвольной интенсивности шума и произвольной амплитуды воздействующего сигнала и такое приближенное описание дает хорошее совпадение с результатами численного моделирования вплоть до частот воздействующего сигнала, близких к частоте отсечки системы и даже позволяет предсказать явление резонансной активации для случая сильного периодического сигнала.

В качестве примера снова рассмотрим систему, имеющую метастабильное состояние, описываемую потенциальным профилем второго типа [26] (пример с потенциальным профилем первого типа был рассмотрен в работе [27]):

$$u(x, t) = (-bx^3 + ax^2 + Ax \cos(\omega t + \psi))/kT, \quad (13)$$

где  $\psi$  – произвольная начальная фаза. Пусть частица в начальный момент времени находится вблизи потенциального минимума. С течением времени потенци-

альный барьер движется вверх и вниз, и вероятность найти частицу в исходном потенциальном минимуме будет стремиться к нулю.

Снова будем интересоваться эволюцией вероятности жизни метастабильного состояния:

$$P(t) = \int_{-\infty}^d W(x, t) dx, \quad (14)$$

где  $d$  – координата вершины барьера в момент времени, когда барьер имел максимальную высоту.

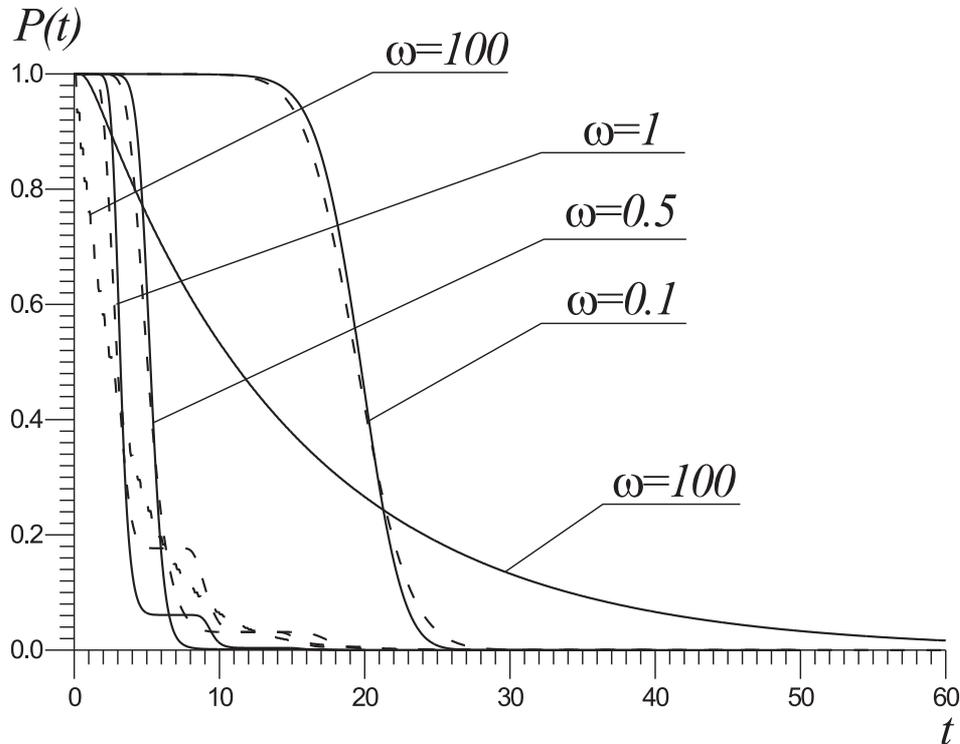


Рис. 13: Эволюция вероятности при  $kT = 0.1$ ,  $A = 1$ ; сплошные линии - результаты численного моделирования, пунктирные линии - адиабатическое приближение (16).

Для анализа эффекта резонансной активации в рассматриваемой системе, в качестве наблюдаемой величины удобно использовать первый момент разложения вероятности жизни (14). Если разложить вероятность в ряд по моментам, как это было сделано выше для постоянных во времени потенциальных профилей, можно показать, что  $\tau(\omega)$ , определенное как

$$\tau(\omega) = \frac{\int_0^{\infty} [P(t) - P(\infty)] dt}{[P(0) - P(\infty)]}, \quad (15)$$

является первым моментом такого разложения (т.е. является средним временем жизни (СВЖ)). В рассматриваемом случае  $\tau(\omega)$  корректно описывает эволюцию

вероятности (сравнение некоторого характерного масштаба эволюции вероятности, напр., уменьшение вероятности в  $e$  раз, и СВЖ дает достаточно хорошее совпадение как в случае нулевой начальной фазы, так и в случае усредненных по начальной фазе характеристик).

Численно вероятность  $P(t)$  была получена путем решения УФПК с потенциалом (13) при следующих величинах параметров  $d = (a + \sqrt{a^2 + 3Ab})/3b$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $A = 1, 0.3, 0.1$ . Для удобства начальное распределение было помещено в окрестности точки  $x_0 = 0 \neq x_{min}$  (явление не чувствительно к местоположению начального распределения). Прежде всего рассмотрим случай нулевой начальной фазы  $\psi = 0$ . При таком выборе фазы потенциальный барьер в начальный момент времени имеет максимальную высоту и уменьшается в течение первого полупериода сигнала. Эволюция вероятности для случая  $\psi = 0$  представлена на Рис. 13 для  $kT = 0.1$ ,  $A = 1$  (случай большого сигнала) для различных значений частоты. Хорошо видно, что распад метастабильного состояния возникает раньше для  $\omega \approx 1$  чем для других значений частоты. Это является проявлением эффекта резонансной активации, что также видно на Рис. 14, где графики среднего времени жизни изображены для различных значений интенсивности шума. Как видно, явление резонансной активации фактически отсутствует для больших интенсивностей шума (при  $kT = 1$  эффект имеет порядок ошибки вычисления) и становится более ярко выраженным по мере уменьшения интенсивности шума.

Для аналитического описания кривой  $\tau(\omega)$  (Рис. 14) можно воспользоваться адиабатическим приближением. Это приближение использовалось для описания явления стохастического резонанса многими авторами [14],[28]. Следует отметить, что часть кривой  $\tau(\omega)$  в области частот  $0 \leq \omega \leq 1$  может быть описано с помощью модифицированного адиабатического приближения [27],[26], позволяющего распространить стандартное описание в область произвольных величин амплитуд сигнала и интенсивности шума. В рамках модифицированного адиабатического приближения вероятность найти частицу в момент времени  $t$  в потенциальном минимуме можно представить в следующем виде:

$$P(x_0, t) = \exp \left\{ - \int_0^t \frac{1}{\tau_p(x_0, t')} dt' \right\}, \quad (16)$$

где  $\tau_p(x_0, t')$  – среднее время жизни метастабильного состояния [49, 50] в соответствующем постоянном во времени потенциальном профиле:

$$\tau_p(x_0) = B \left\{ \int_{x_0}^d e^{u(y)} \int_{-\infty}^y e^{-u(x)} dx dy + \int_d^{\infty} e^{u(y)} dy \int_{-\infty}^d e^{-u(x)} dx \right\}. \quad (17)$$

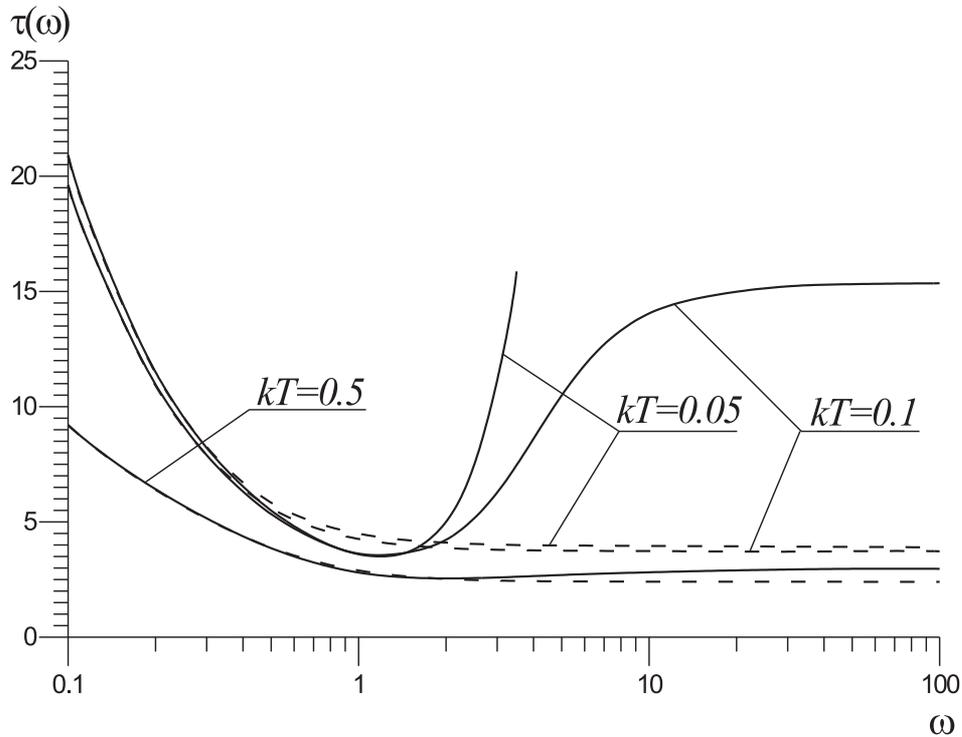


Рис. 14: Среднее время перехода как функция частоты сигнала при  $kT = 0.5, 0.1, 0.05$ ,  $A = 1$ , начальная фаза равна нулю; сплошные линии - результаты численного моделирования, пунктирные линии - адиабатическое приближение (16).

(Отметим, что по сравнению с обычным адиабатическим приближением мы подставили точное время жизни (17) вместо приближенного времени Крамерса и получили неожиданно хорошее совпадение между таким приближенным описанием и результатами численного моделирования в широкой области параметров).

Соответствующие кривые, полученные по формулам (16), (17), представлены на Рис. 13, 14 пунктирными линиями, откуда можно видеть хорошее совпадение между модифицированным адиабатическим приближением и результатами численного моделирования вплоть до частот  $\omega \sim 1$ . Более того, при увеличении интенсивности шума границы применимости адиабатического приближения увеличиваются. Это согласуется с самой идеей применения адиабатического приближения [28], [14], основанного на концепции моментального перескока через барьер, поскольку очевидно, что при большей интенсивности шума перескоки происходят быстрее.

В другом предельном случае при  $\omega \gg 1$ ,  $\tau(\omega)$  может быть описано формулой (17), в которую должен быть подставлен потенциальный профиль (13) усредненный по периоду воздействующего сигнала. Таким образом, можно получить эмпирическое соотношение для "амплитуды" эффекта резонансной активации при

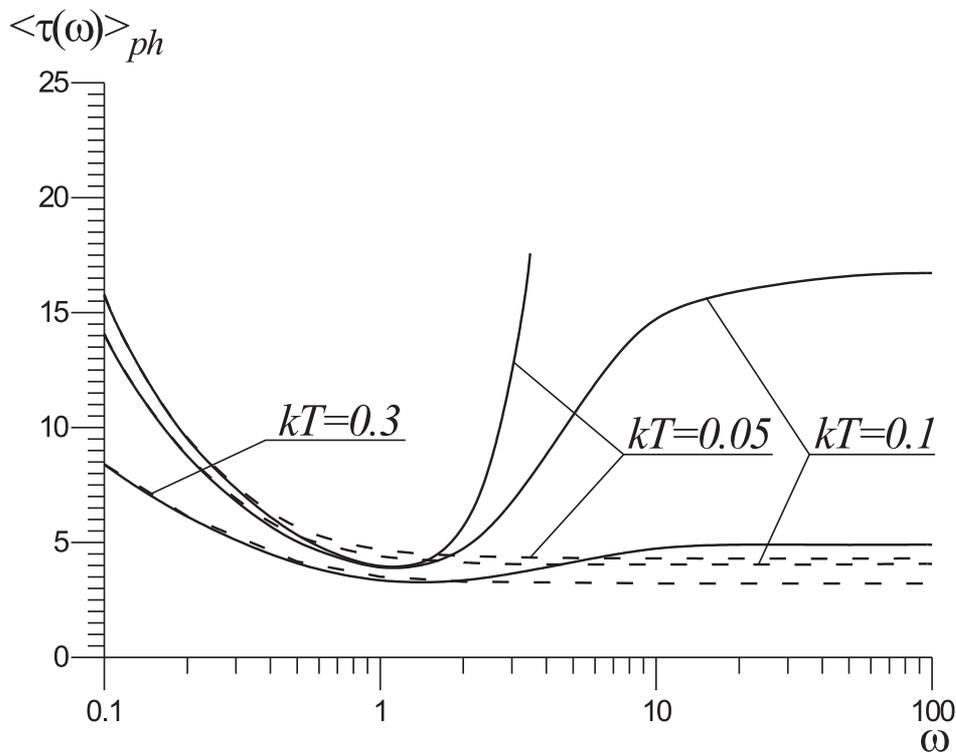


Рис. 15: Усредненное по фазе среднее время перехода как функция частоты сигнала,  $kT = 0.3, 0.1, 0.05$ ,  $A = 1$ ; сплошные линии - результаты численного моделирования, пунктирные линии - адиабатическое приближение (16).

$\omega = 0$ ,  $\omega = \infty$ :

$$\tau_0 = \frac{\tau_p(x_0)}{\tau_a(x_0, \infty)}, \quad \tau_\infty = \frac{\tau_p(x_0, \bar{u}(x, t))}{\tau_a(x_0, \infty)}, \quad (18)$$

где  $\tau_a(x_0, \infty)$  обозначает минимальное значение  $\tau(\omega)$ , приближенно равное значению, получаемому в рамках адиабатического приближения при  $\omega \rightarrow \infty$  и  $\bar{u}(x, t)$  обозначает потенциал (13), усредненному по периоду. Необходимо отметить, что явление резонансной активации может быть предсказано на основе аналитического рассмотрения в областях  $0 < \omega < 1$  и  $\omega \gg 1$  без необходимости численного моделирования, поскольку имеет место следующее соотношение:  $\tau(\omega \approx 1) < \tau(\omega = 0)$ ,  $\tau(\omega \approx 1) < \tau(\omega = \infty)$ .

Подобный анализ СВЖ может быть также проведен для произвольной начальной фазы  $\psi \neq 0$ . В зависимости от фазы  $\tau(\omega)$  может существенно изменяться (особенно в низкочастотном пределе). Это вызвано тем обстоятельством, что высота потенциального барьера в начальный момент времени сильно меняется (от нуля до некоторого максимального значения) в зависимости от начальной фазы. Поскольку в экспериментах начальная фаза иногда неизвестна, ее можно рассматривать как равномерно распределенную случайную величину, так что естественно усреднить среднее время жизни по распределению начальной фазы  $\langle \tau(\omega) \rangle_{ph}$ . Со-

ответствующие кривые представлены на Рис. 15, откуда видно, что  $\langle \tau(\omega) \rangle_{ph}$  имеет то же самое качественное поведение, как и для случая  $\psi = 0$  (ср. с Рис. 14), и таким образом можно сделать вывод, что данное явление слабо зависит от начальной фазы.

Важным обстоятельством является то, что кривые СВЖ для различных интенсивностей шума ( $kT < 0.1$ ) фактически совпадают друг с другом и с кривой для  $kT = 0$  в области частот, соответствующих минимуму кривой  $\tau(\omega)$  ( $\omega \sim 1$ ) (см. Рис. 14,15). Это значит, что в данной области параметров флуктуации подавлены сильным внешним сигналом, и, таким образом, настройка практических устройств в такой режим работы может существенно уменьшить ошибки индуцированного шумом переключения из одного состояния в другое.

Также была исследована зависимость усредненного по фазе среднего времени жизни от амплитуды воздействующего сигнала, соответствующие кривые изображены на Рис. 16. Как нетрудно видеть, явление резонансной активации существует и для достаточно малых значений амплитуды ( $A = 0.3, 0.1$ ), когда переходы через барьер не могут происходить в отсутствие шума. Как показано в работе [26], положение минимума  $\omega_{min}$  СВЖ  $\langle \tau(\omega) \rangle_{ph}$ , также как и величина минимума  $\langle \tau(\omega) \rangle_{ph}$  сильно зависит от  $kT$ . С другой стороны, для малых амплитуд воздействующего сигнала явление резонансной активации заметно уменьшается, и положение минимума кривой  $\tau(\omega)$  смещается в область  $\omega \sim 0.5$ .

Интуитивно очевидно, что явление резонансной активации и слабой зависимости времени жизни от интенсивности шума должно как-то проявляться и для систем, в которых существуют стационарные вероятностные распределения (напр., в системе, описываемой "quartic" потенциалом, которая в течение ряда лет интенсивно исследовалась с целью изучения явления стохастического резонанса [15],[16]). Для такой системы будет более естественным исследовать резонансные свойства отношения сигнал/шум (ОСШ) [29].

Итак, рассмотрим процесс броуновской диффузии в потенциальном профиле  $u(x, t) = (bx^4 - ax^2 + xA \sin(\omega t + \psi)) / kT$ , где  $\psi$  – начальная фаза. Характеристикой, которая нас интересует, является отношение сигнал/шум. В соответствии с работой [15] обозначим ОСШ как:

$$R = \frac{1}{S_N(\omega)} \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \int_{\omega - \Delta\Omega}^{\omega + \Delta\Omega} S(\Omega) d\Omega, \quad (19)$$

где

$$S(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega\tau} K[t + \tau, t] d\tau \quad (20)$$

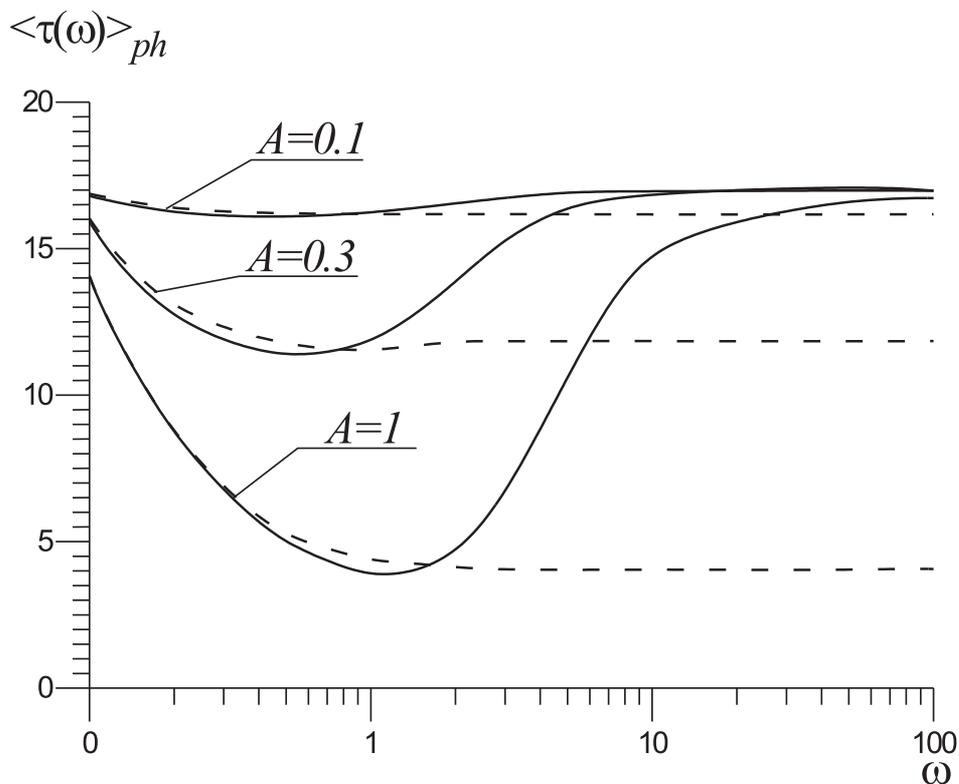


Рис. 16: Усредненное по фазе среднее время перехода как функция частоты сигнала,  $A = 1, 0.3, 0.1$ ,  $kT = 0.1$ ; сплошные линии - результаты численного моделирования, пунктирные линии - адиабатическое приближение (16).

– спектральная плотность,  $S_N(\omega)$  – шумовой пьедестал на частоте воздействующего сигнала  $\omega$  и  $K[t + \tau, t]$  – функция корреляции:

$$K[t + \tau, t] = \langle \langle x(t + \tau)x(t) \rangle \rangle, \quad (21)$$

где внутренние скобки обозначают усреднение по ансамблю, а внешние – усреднение по начальной фазе  $\psi$ .

При численном моделировании были взяты следующие параметры потенциала:  $b = 1$ ,  $a = 2$ . При этом координаты минимумов расположены при  $x_{min} = \pm 1$ , высота барьера в отсутствие внешнего сигнала  $\Delta U = 1$ , критическая амплитуда  $A_c$  порядка 1.5, вычисления проводились при  $A = 2$ , для того, чтобы заметно превысить  $A_c$ . Также, анализ был проведен при больших амплитудах  $A = 3; 4; 5$ : при этом качественно результаты остались теми же, только ОСШ соответственно выросло. Для получения корреляционной функции  $K[t + \tau, t]$  уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова было решено численно, используя схему Крэнка-Никольсон.

На Рис. 17 приведено отношение сигнал/шум как функция частоты воздействующего сигнала. Эта функция имеет явно выраженный максимум. Положение максимума  $\omega = \omega_{max}$  примерно соответствует условию совпадения времен-

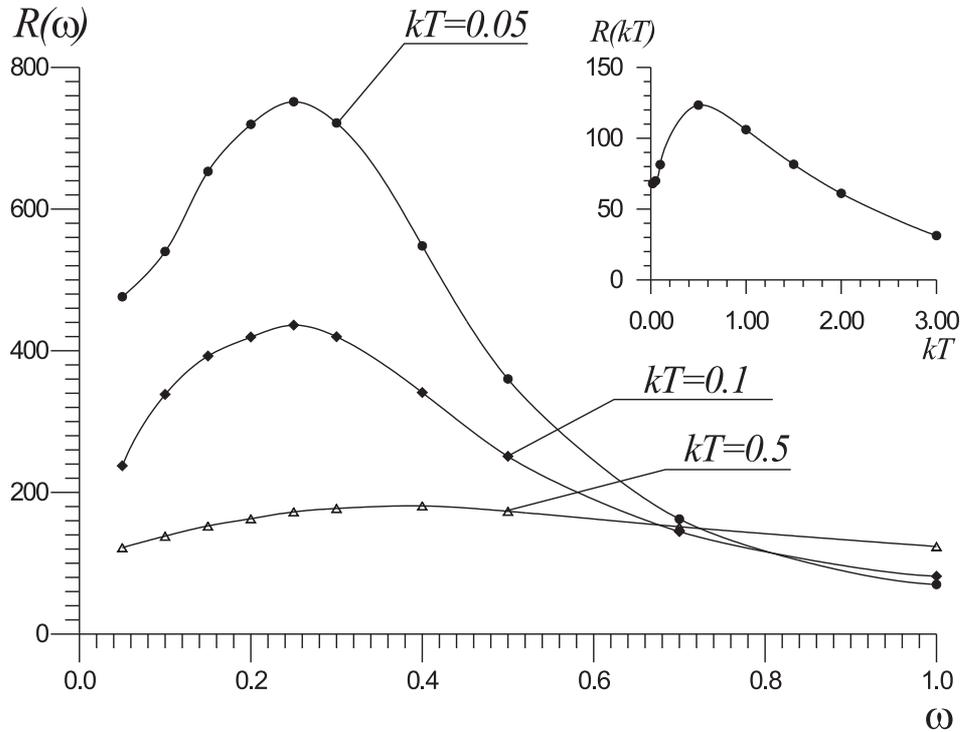


Рис. 17: Отношение сигнал/шум как функция частоты сигнала при  $A = 2$ . Вставка: Отношение сигнал/шум как функция  $kT$  при  $\omega = 1$ .

ных масштабов:  $\omega_{max} \approx \pi/\tau_{min}$ , где  $\tau_{min}$  – минимальное время перехода из одного состояния в другое. Существование оптимальной частоты сигнала может быть объяснено следующим образом. Рассмотрим случай адиабатически медленного изменения высоты потенциального барьера. Если шум отсутствует, переход через барьер произойдет только после того, как пропадет соответствующий потенциальный барьер. Если в систему добавить слабый шум, то перескок через барьер произойдет раньше, чем он произошел бы в отсутствие флуктуаций, при некоторой ненулевой высоте потенциального барьера. Если увеличить частоту сигнала, высота потенциального барьера будет уменьшаться быстрее и перескок произойдет при более низком барьере, что ближе к случаю, когда шум отсутствует. В случае, когда частота сигнала выше частоты отсечки системы,  $\omega \geq \omega_c$  (где  $\omega_c$  имеет динамический смысл: для данной амплитуды сигнала отклик системы существенно уменьшается, если частота сигнала превышает некоторую величину), частица никогда не преодолет барьер в отсутствие шума и будет находиться в окрестности исходного потенциального минимума, поскольку у нее не будет достаточно времени для того, чтобы достичь область притяжения другого состояния. Таким образом, существует некоторая область частот, в которой перескок через барьер будет происходить при его наименьшей высоте, и именно в этой области параметров шум имеет наименьшее влияние на систему, что приводит к максимуму

отношения сигнал/шум. Когда частота сигнала выше частоты отсечки системы,  $\omega \geq \omega_c$ , шум помогает частице перескочить в другой потенциальный минимум и в этом случае имеет место явление стохастического резонанса (см. вставку Рис. 17 для  $\omega = 1$ ).

Таким образом, в случае сильного периодического воздействия отношение сигнал/шум бистабильной системы, также как и среднее время жизни метастабильного состояния, имеют резонансное поведение как функции частоты воздействующего сигнала, что отражает близкую природу этих явлений.

Отметим в заключение, что практическое применение явления резонансной активации и подавления шумов дает возможность настроить конкретное устройство в режим минимальной ошибки, вызванной шумом. Недавно, соответствующие исследования по оптимизации параметров были проведены для СВЧ гистерезисного сверхпроводящего квантового интерферометра, что позволяет существенно повысить чувствительность данного устройства [30].

### III. ПРИМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТА ПОДАВЛЕНИЯ ШУМОВ В МАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ

Применение описанного выше эффекта подавления шума востребовано как в устройствах джозефсоновской электроники, так и в системах магнитных наночастиц. При этом, в силу сложной трехмерной динамики вектора намагниченности, правильное применение данного эффекта позволяет уменьшить ошибки перемагничивания на несколько порядков. В данном разделе будет подробно рассмотрен процесс высокоскоростного перемагничивания магнитной наночастицы.

Уменьшение размеров магнитных наночастиц, используемых в устройствах хранения информации (таких, например, как жестких магнитных дисков, являющихся основой любого современного компьютера) приводит к увеличению флуктуаций и, следовательно, как к потере информации в процессе ее хранения, так и к увеличению ошибок передачи информации (т.н. джиттер). По причине малых размеров, наночастицы часто могут рассматриваться в качестве однодоменных частиц [31]-[34], поскольку неоднородное распределение намагниченности является энергетически невыгодным. Теоретическое исследование сопровождаемого шумом высокоскоростного перемагничивания вектора намагниченности является актуальным как применительно к магнитным жестким дискам [35], так и магниторезистивной памяти [32]-[34]. В течение последних десятилетий в нелинейных системах были обнаружены такие нетривиальные явления как резонансная активация (РА) [14],[36], стохастический резонанс [15],[16], подавление шума внешним сигналом и задержка шумом переключений (ЗШП) [19],[51],[49]. Однако, в магнитных системах было подтверждено только существование стохастического резонанса [37]. По причине сложности модели магнитного диполя, описываемого нестационарным уравнением Ландау-Лифшица с шумом [38], ранее в основном исследовались только времена релаксации [46],[47],[48],[39]. Без учета влияния шума ранее был найден оптимальный угол перемагничивания (угол между приложенным магнитным полем и осью анизотропии), равный примерно 45 градусам [35],[40]; было показано, что с укрупнением фронта импульса увеличивается коэрцитивность (размах петли гистерезиса) магнитных частиц [41], [42]. В работах [33],[34] проведена оптимизация длительности переключающего импульса для уменьшения переходного процесса. При конечной температуре наиболее серьезной проблемой является обеспечение стабильного перемагничивания: процесс переключения должен происходить с минимальным средним временем перемагничивания и минимальным среднеквадратическим отклонением. Для практических применений в устройствах хранения информации является очень важным исследовать взаимодействие эффекта подавления шума и эффекта задержки пе-

реключения шумом, поскольку эти эффекты приводят к противоположным последствиям: с помощью первого как время переключения, так и индуцированные шумом ошибки могут быть кардинально уменьшены, в то время как второе приводит к увеличению времени перемагничивания. Среднее время перемагничивания (СВП) магнитных частиц исследовалось в работах [43], [44], при этом в работе [44] было показано, что при сопровождаемом шумом перемагничивании шум приводит не к увеличению, а к уменьшению СВП.

В данном разделе представлены результаты исследования процесса перемагничивания однодоменной одноосевой магнитной частицы в рамках численного моделирования уравнения Ландау-Лифшица с шумом. Главной целью данного исследования является нахождение оптимального режима перемагничивания, при котором наблюдаются минимальные СВП и среднее квадратическое отклонение (СКО).

Динамика магнитного диполя описывается уравнением Ландау-Лифшица:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{\beta} [\vec{M} \times \vec{H}] - \frac{\alpha\gamma}{\beta M_s} [\vec{M} \times [\vec{M} \times \vec{H}]], \quad (22)$$

где  $\vec{M}$  – намагниченность частицы,  $\vec{H}$  – эффективное магнитное поле,  $\gamma$  – гиромагнитная константа,  $\beta = 1 + \alpha^2$ ,  $\alpha$  – затухание,  $M_s = |\vec{M}|$  – намагниченность насыщения. Эффективное магнитное поле содержит следующие компоненты:  $\vec{H} = \vec{H}_a + \vec{H}_e + \vec{H}_T$ , где  $\vec{H}_a$  – поле анизотропии,  $\vec{H}_e$  – внешнее перемагничивающее поле и  $\vec{H}_T$  – флуктуационное поле. Подразумевается, что флуктуационное поле является белым гауссовым шумом с нулевым средним и функцией корреляции:  $\langle H(t)_T H(t')_T \rangle = \frac{2\alpha kT}{\gamma M_s V} \delta(t - t')$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура, и  $V$  – объем магнитной наночастицы.

Рассмотрим процесс перемагничивания магнитного диполя, изначально намагниченного вдоль оси анизотропии (которая направлена по оси  $x$ ) из состояния  $\vec{M}[+M_s, 0, 0]$  в состояние  $\vec{M}[-M_s, 0, 0]$ . Для нахождения области параметров, в которой происходит наиболее быстрое и надежное перемагничивание, выберем в качестве исследуемой характеристики среднее время первого достижения некоторой границы. Среднее время первого достижения (среднее время перемагничивания, СВП)  $\tau$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  (СКО, джиттер) по определению [9]:  $\tau = \langle t \rangle = \sum_{i=1}^N t_i / N$ ,  $\langle t^2 \rangle = \sum_{i=1}^N t_i^2 / N$ ,  $\sigma = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$ , где  $t_i$  – время первого достижения поглощающей границы и  $N \geq 10000$  – число реализаций. Как и в работе [45] при нахождении СВП выберем границу  $\vec{M}[0, M_y, M_z]$ .

При вычислениях будем использовать параметры, имеющие отношение к реальным магнитным устройствам [35]:  $\alpha=0.1$ ,  $\gamma=1.76 \cdot 10^7 \text{ Hz/Oe}$ ,  $M_s=360 \text{ emu/cm}^3$ ,

$V=2 \cdot 10^3 \text{nm}^3$ , константа анизотропии  $K=7.2 \cdot 10^5 \text{erg/cm}^3$ . Статическое поле коэрцитивности имеет следующее значение:  $H_c=2K/M_s=4000 \text{Oe}$ . При моделировании возьмем амплитуду переключающего магнитного поля равной  $H_0=6000 \text{Oe}$ . Известно, что переключение сигналами с резкими фронтами приводит к наименьшему значению СВП [52]. Однако, импульсы, используемые в реальных устройствах имеют конечную длительность фронта [32]-[35]. В качестве примера импульса с плавными фронтами, подобного используемым в экспериментах [32]-[35], рассмотрим синусоидальный импульс  $\vec{H}_e = \vec{e} H_0 \sin \pi t / t_p$  с длительностью  $t_p$  (см. вставку Рис. 18), где  $\vec{e}$  – единичный вектор направления магнитного поля. Область температур 4 – 300 К, в которой проводились исследования, очевидно приводит к интенсивности шума много меньшей, чем энергия активации системы, так что перемагничивание под действием внешнего импульса может произойти и без помощи шума при углах между осью анизотропии и внешним полем, заметно отличных от нуля. Если перемагничивание не происходит в течение длительности импульса  $t_p$ , вычисления продолжаются при нулевом поле  $\vec{H}_e=0$  до некоторого момента времени  $t_f$ , гораздо большего чем любое время релаксации системы. Нашей целью является определение области параметров, в которой перемагничивание импульсом с плавными фронтами происходит быстро и надежно.

Уравнение Ландау-Лифшица с шумом решалось численно методом Хюна, программа была написана на языке Фортран, а также с помощью специализированного пакета SIMMAG (SIMulation of MicroMAGnets), разработанного в лаборатории математического моделирования ИФМ РАН. Результаты, полученные с помощью обеих программ, полностью совпали.

Известно, что при нулевой температуре  $T = 0$  не происходит перемагничивания диполя продольным полем  $\theta = 0^\circ$ , поскольку диполь находится в состоянии равновесия, даже несмотря на то, что это состояние равновесия является неустойчивым. Присутствие тепловых флуктуаций позволяет вывести диполь из области притяжения этого состояния равновесия. На Рис. 18 представлены графики среднего времени перемагничивания  $\tau$  и среднеквадратического отклонения  $\sigma$ . Прежде всего видно, что и  $\tau$  и  $\sigma$  имеют минимумы как функции длительности импульса. Это напоминает явление резонансной активации (и, фактически, является явлением подавления шума внешним сигналом, см. предыдущий раздел данной лекции), и показывает, что обе эти временные характеристики могут быть минимизированы путем оптимального выбора длительности импульса. Подобное явление подавления шума внешним сигналом было недавно обнаружено при исследовании модели точечного джозефсоновского контакта [52] и при исследовании моделей Ходжкина-Хаксли и Фитцхью-Нагумо нейронных систем [53].

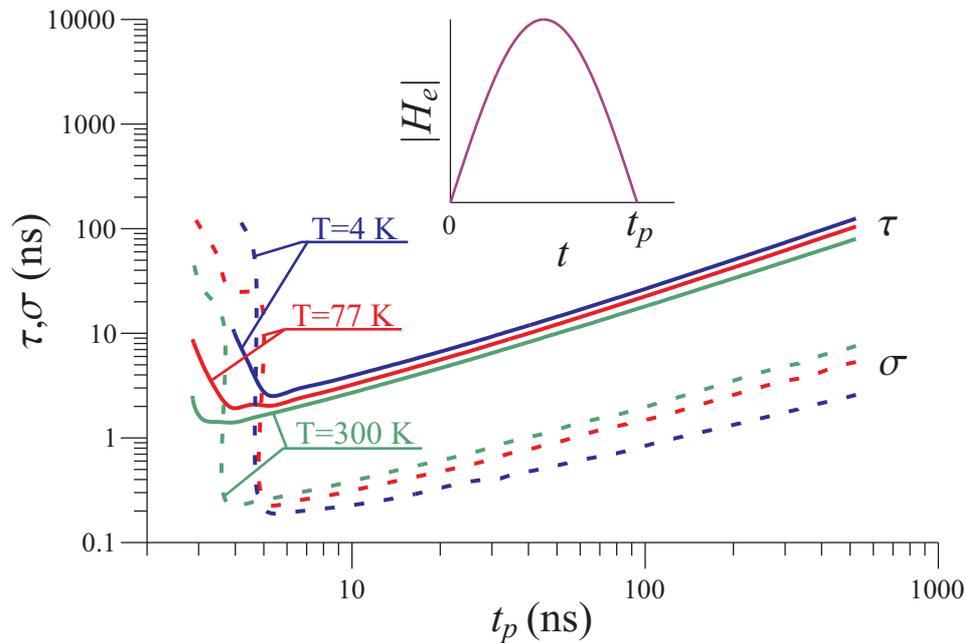


Рис. 18: Среднее время перемагничивания (сплошные кривые) и среднеквадратическое отклонение (пунктирные кривые) как функции длительности импульса в случае нулевого угла между осью анизотропии и внешнего поля  $\theta = 0^\circ$ . Вставка: форма перемагничивающего импульса.

Уменьшение СВП при больших длительностях импульса происходит по причине того, что с уменьшением длительности потенциальный барьер уменьшается быстрее. При дальнейшем укорочении импульса наступает момент, когда намагниченность не успевает завершить процесс переключения за время действия импульса  $t_p$ , поэтому СВП увеличивается. Это, фактически, означает, что при достаточно малых длительностях перемагничивание происходит не вследствие воздействия импульса, а из-за тепловых флуктуаций (т.н. индуцированное шумом переключение). Среднеквадратическое отклонение с уменьшением длительности импульса ведет себя подобно  $\tau$ , но кривые для разных температур пересекают друг друга. При больших длительностях меньшие температуры приводят к меньшим  $\sigma$ , а при малых длительностях - наоборот. Это также объясняется переходом от режима перемагничивания внешним полем к режиму индуцированных шумом переключений, поскольку известно (см., напр., [9], а также главу 2 и предыдущие разделы главы 3), что при индуцированных шумом переключениях среднеквадратическое отклонение примерно равно среднему времени переключения.

Отметим еще несколько особенностей, которые ясно видны на Рис. 18: большие значения температуры приводят к меньшим значениям СВП, т.е. шум позволяет ускорить процесс перемагничивания. Этот результат совпадает с предсказаниями работы [44], но противоречит результатам для джозефсоновских контактов [52]. Кроме того, зависимость  $\sigma \sim \sqrt{T}$ , привычная для джозефсоновских контактов

при больших длительностях импульса также в данном случае не наблюдается, как видно из Рис. 18 зависимость  $\sigma(T)$  от температуры более медленная, чем  $\sqrt{T}$ . Объяснением такого поведения является следующая особенность процесса перемагничивания при  $\theta = 0^\circ$ : в отличие от джозефсоновских контактов [52], по причине начального положения вектора намагниченности в состоянии неустойчивого равновесия, перемагничивание невозможно при нулевой температуре и, соответственно, детерминированной траектории не существует. Именно поэтому флуктуации помогают покинуть исходную точку неустойчивого равновесия, и именно это приводит к вышеописанным особенностям. Необходимо отметить, что обсуждаемый случай  $\theta = 0^\circ$ , а именно этот случай ранее исследовался аналитически [46],[47],[48], является вырожденным: во-первых, технически угол между осью анизотропии и внешним полем может быть выдержан с конечной точностью, и, во-вторых, СВП в этом случае является максимальным, см. далее.

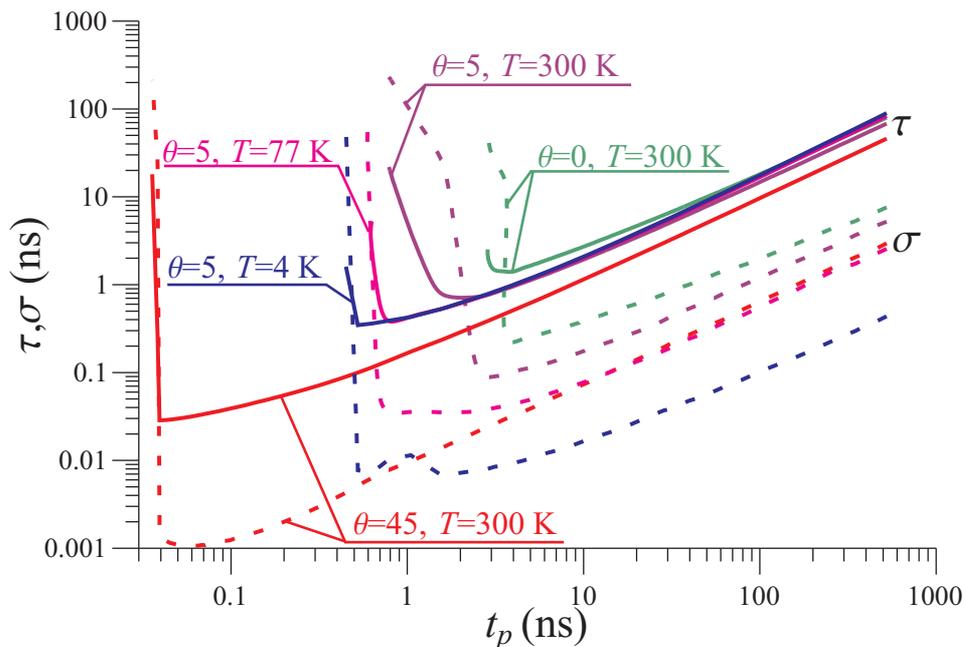


Рис. 19: СВП (сплошные кривые) и СО (пунктирные кривые) как функции длительности импульса для различных углов между осью анизотропии и внешним полем и различных температур для угла  $\theta = 5^\circ$ .

На Рис. 19 СВП и СО приведены для трех различных значений углов  $\theta=0^\circ, 5^\circ, 45^\circ$  при температуре  $T=300\text{ K}$  и трех различных температур при  $\theta=5^\circ$ . Прежде всего, проанализируем поведение кривых для  $\theta=5^\circ$ . Несмотря на то, что при больших длительностях  $t_p$  можно видеть небольшое уменьшение СВП с увеличением температуры, при малых  $t_p$  вблизи минимума ясно виден противоположный эффект задержки шумом переключения, подобный тому, который наблюдался как в модели джозефсоновского контакта [52], так и в общем случае нелинейных систем [19],[51],[49]. Отметим, что для рассмотренного значения  $\theta=5^\circ$

СВП увеличивается примерно в 2 раза при изменении температуры от 4 К до 300 К. Кроме того, в рассмотренном случае СО ведет себя как  $\sigma \sim \sqrt{T}$ , см. [52].

Из графиков Рис. 19 очевидно, что при угле  $\theta=45^\circ$  перемагничивание происходит быстрее и более надежно чем в случае  $\theta=0^\circ, 5^\circ$  при других одинаковых параметрах. Кроме того, различие между СВП при углах  $\theta=0^\circ$  и  $\theta=5^\circ$  составляет два раза, в то время как СО отличаются примерно в три раза. Если сравнивать  $\theta=5^\circ$  и  $\theta=45^\circ$ , то разница становится еще больше, более порядка для СВП и почти два порядка для СО. Это означает, что процесс перемагничивания принципиально зависит от прецессии вектора намагниченности и не может быть описан простой моделью двух состояний. Этот результат является количественным подтверждением идеи использовать наклонное магнитное поле для ускорения процесса перемагничивания [54], а также использовать слабое перпендикулярное магнитное поле для той же цели [55], что фактически приводит к наклону суммарного магнитного поля. Для грубой оценки вероятности того, что диполь не будет перемагничен за время действия импульса длительности  $t_p$ , плотность вероятности времен перемагничивания может быть приближенно аппроксимирована гауссовой кривой со средним  $\tau$  и СО  $\sigma$ . Тогда вероятность неперемагничивания имеет вид:  $p = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}((t_p - \tau)/\sqrt{2}\sigma)$ . При температуре  $T=300$  К в минимуме  $\sigma$  можно получить  $p=10^{-48}$  даже при нулевом угле  $\theta=0^\circ$ . Однако, при  $\theta=0^\circ, 5^\circ$  в минимуме  $\tau$  получаем недопустимо большую вероятность порядка 0.001 ( $p=10^{-56}$  для угла  $\theta=45^\circ$ ). Таким образом, именно в минимуме СО должна быть выбрана рабочая точка (т.е. оптимальная длительность импульса) при которой будет достигнуто наискорейшее перемагничивание с минимальной индуцированной шумом ошибкой.

На Рис. 20 СВП и СО представлены как функции угла между осью анизотропии и внешним магнитным полем  $\theta$  для различных значений затухания  $\alpha$ , при длительности импульса  $t_p=8$  ns и температуре  $T=300$  К. Для  $\theta \rightarrow 0^\circ$  меньшие значения затухания приводят к большим величинам  $\tau$  и  $\sigma$ , как это и должно быть (большие значения  $\tau$  и  $\sigma$  при  $\theta \rightarrow 0^\circ$  и  $\alpha=0.01$  означают, что в этой области параметров и при данной длительности импульса происходит не динамическое, а индуцированное шумом перемагничивание). Однако, для больших углов кривые СВП практически совпадают, в то время как СО меньше для меньших значений затухания  $\alpha$ . Для того, чтобы разобраться, откуда берутся такие зависимости, построим траектории вектора намагниченности для углов  $\theta=0^\circ, 5^\circ, 45^\circ$ , см. вставку Рис. 20 для  $\alpha=0.1$ ,  $t_p=16$  ns. Из графиков видно, что наиболее заметная прецессия наблюдается при нулевом  $\theta = 0^\circ$ , при угле  $\theta=5^\circ$  число витков меньше, и при угле  $\theta=45^\circ$  пересечение границы  $\vec{M}[0, M_y, M_z]$  происходит вообще без прецессии.

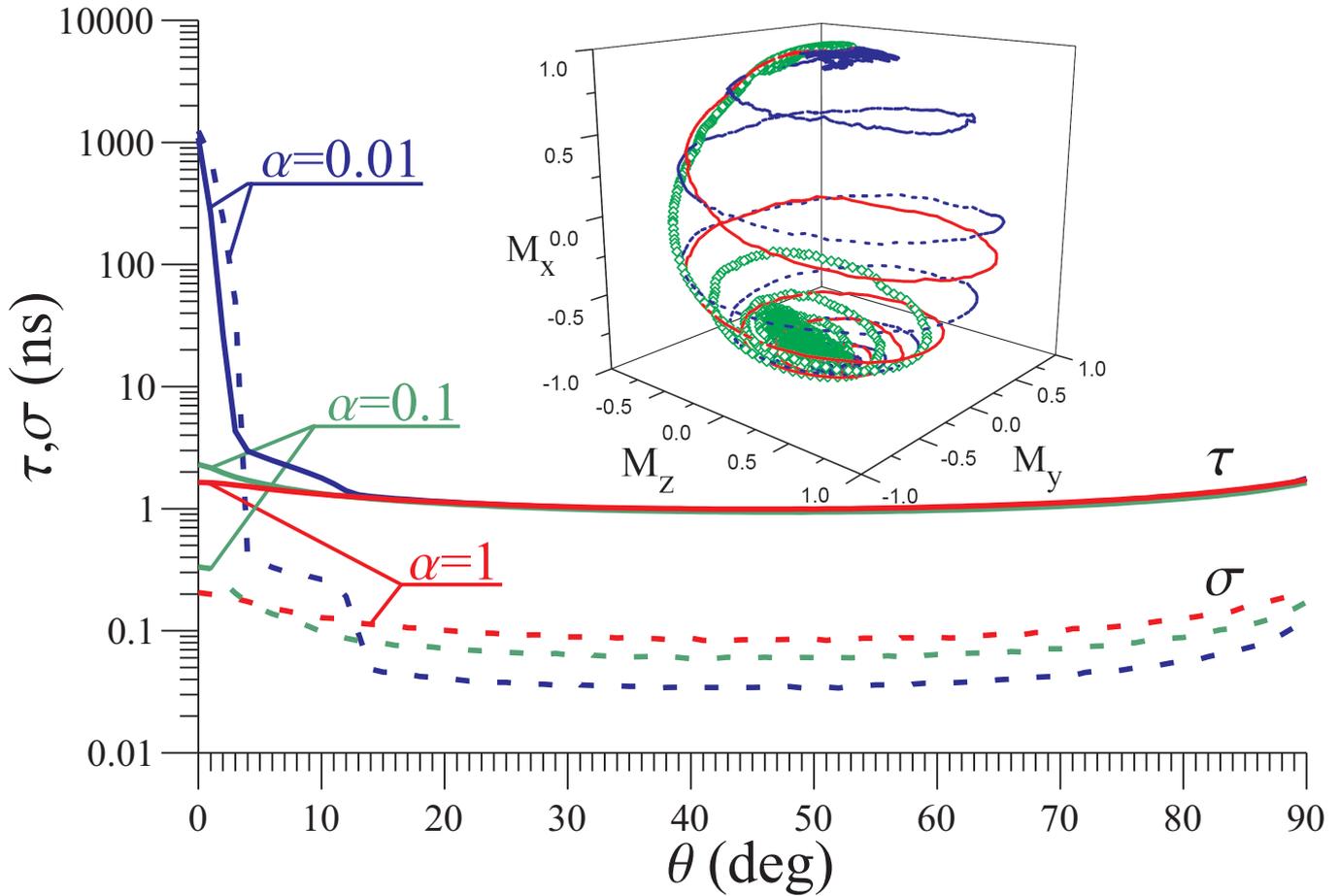


Рис. 20: СВП (сплошные кривые) и СО (пунктирные кривые) как функции угла между осью анизотропии и внешним магнитным полем для различных значений затухания  $\alpha$ , при длительности импульса  $t_p = 8$  ns и температуре  $T=300$  К. Вставка: траектории намагниченности для различных углов,  $\alpha=0.1$ ,  $t_p=16$  ns,  $T=300$  К;  $\theta = 0^\circ$  - точки,  $\theta = 5^\circ$  - сплошная кривая,  $\theta = 45^\circ$  - ромбы.

Это объясняет, почему перемагничивание в последнем случае происходит значительно быстрее чем при угле  $\theta=0^\circ$  и имеет слабую зависимость от затухания  $\alpha$  в пределе  $\alpha \ll 1$ , см. Рис. 20. Поскольку длина траектории почти такая же для различных значений  $\alpha$  (СВП почти совпадает), а интенсивность шума пропорциональна затуханию, это с очевидностью приводит к меньшим значениям СО для меньших  $\alpha$ .

На Рис. 21 представлены СВП и СО как функции угла  $\theta$  для различных значений амплитуды воздействующего импульса. Видно, что начиная со значений углов  $20^\circ - 30^\circ$  и вплоть до  $\sim 70^\circ$  наблюдаются достаточно плоские минимумы СВП и СО, что соответствует области углов, при которых происходит наиболее быстрое и надежное перемагничивание. При температуре  $T = 300$  К перемагничивание возможно вплоть до амплитуды  $H_0 = 2$  kOe, которое гораздо меньше статического поля коэрцитивности  $H_c$ , и это с достаточно малым значением СО. Однако, в этом случае рабочая область ограничена узким диапазоном углов  $\theta = 35^\circ - 55^\circ$

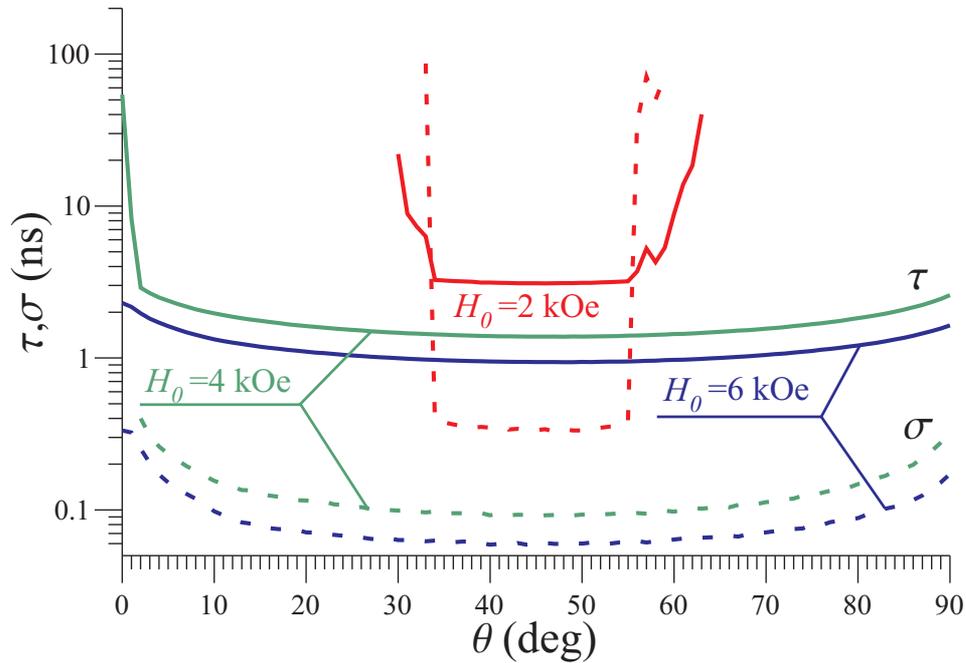


Рис. 21: СВП (сплошные кривые) и СО (пунктирные кривые) как функции угла между осью анизотропии и внешним магнитным полем для различных значений амплитуды внешнего магнитного поля при длительности импульса  $t_p=8$  ns и температуре  $T=300$  К.

(ср. с результатами работ [40],[45], в которых предельно допустимые значения амплитуд заметно больше). В работе [31] было предложено использовать сумму постоянного и слабого переменного магнитных полей для уменьшения амплитуды переключающего магнитного поля посредством механизма нелинейного резонанса. Однако, в этом случае сильно возрастет время перемагничивания, в то время как надежность уменьшится. Как следует из результатов данного раздела, использование перемагничивающего поля, направленного под углом  $\theta = 45^\circ$  к оси анизотропии позволяет существенно уменьшить амплитуду поля без серьезного уменьшения флуктуационной устойчивости.

В данном разделе исследовано влияние тепловых флуктуаций на процесс высокоскоростного перемагничивания однодоменной одноосевой магнитной наночастицы. Исследовано взаимодействие эффекта подавления шума и эффекта задержки переключения шумом. Показано, что при перемагничивании импульсом с плавными фронтами, существует оптимальная длительность импульса, при которой и среднее время перемагничивания (СВП) и среднеквадратическое отклонение (СО) принимают минимальные значения. Также и СВП и СО сильно зависят от угла между переключающим магнитным полем и осью анизотропии. По сравнению со случаем осевой симметрии  $\theta = 0^\circ$ , при оптимальном значении угла  $\theta = 45^\circ$  СВП может быть уменьшено от 7 раз до двух порядков, а СО может быть уменьшено от одного до трех порядков при изменении затухания  $\alpha$  от 1 до

0.01. В области оптимальных значений угла  $\text{CO}$  уменьшается при уменьшении затухания, а СВП практически не меняется. Этот последний результат является важным по причине недавних экспериментов, демонстрирующих что в реальных микроструктурных тонкопленочных устройствах затухание может быть даже меньше чем 0.01. Также показано, что флуктуации не только могут ускорять процесс перемагничивания, как это было известно ранее для магнитных систем и справедливо только при малых значениях угла  $\theta$ , но также могут и существенно увеличивать среднее время перемагничивания.

- 
- [1] H. Risken, *The Fokker-Planck equation* (Springer Verlag, Berlin, 1985).
- [2] C.W. Gardiner, *Textbook of Stochastic methods* (Springer-Verlag, 1985).
- [3] A. Szabo, K. Schulten, Z. Schulten, First passage time approach to diffusion controlled reactions, *J. Chem. Phys.*, 72, №8, 4350-4357 (1980).
- [4] W. Nadler, K. Schulten, Generalized moment expansion for Brownian relaxation processes, *J. Chem. Phys.*, 82, №1, 151-160 (1985).
- [5] A.L. Pankratov, On certain time characteristics of dynamical systems driven by noise, *Phys. Lett. A*, 234, №5, 329-335 (1997).
- [6] S.P. Nikitenkova, A.L. Pankratov, Nondecay probability of the "correct" state of a memory cell: Analytic approach versus numeric simulation, *Phys. Rev. E*, 58, №6, 6964-6967 (1998).
- [7] A.L. Pankratov, Time evolution of averages in dynamical systems driven by noise, *Phys. Lett. A*, 255, №1-2, 17-22 (1999).
- [8] A.A. Antonov, A.L. Pankratov, A.V. Yulin, J. Mygind, Influence of thermal fluctuations on Cherenkov radiation from fluxons in dissipative Josephson systems, *Phys. Rev. B*, 61, №14, 9809-9819 (2000).
- [9] A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, Evolution times of probability distributions and averages - Exact solutions of the Kramers' problem, *Adv. Chem. Phys.*, 121, 357-438 (2002).
- [10] S.R. Shenoy, G.S. Agarwal, First-passage times and hysteresis in multivariable stochastic processes: The two-mode ring laser, *Phys. Rev. A*, 29, №3, 1315-1325 (1984).
- [11] А.Н. Малахов, Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований, М.: Советское Радио, 376 с. (1978).
- [12] A.N. Malakhov, Diffusion through sharp potential barriers. 1. Exact solution, *Radiophys. Quantum Electron.* 34, №5, 451-460 (1991).
- [13] A.N. Malakhov, Diffusion through sharp potential barriers. 2. Time characteristics of diffusion, *Radiophys. Quantum Electron.* 34, №6, 571-580 (1991).
- [14] P. Jung, Periodically driven stochastic systems, *Physics Reports*, 234, №4-5, 175-295 (1993).
- [15] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, F. Marchesoni, Stochastic resonance, *Rev. Mod. Phys.*, 70, №1, 223-287 (1998).
- [16] В.С. Анищенко, А. Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка, *Успехи Физических Наук*, 169, №1, 7-38 (1999).
- [17] F. Julicher, A. Ajdari, J. Prost, Modeling molecular motors, *Rev. Mod. Phys.*, 69, №4, 1269-1282 (1997).
- [18] C.R. Doering, Stochastic ratchets, *Physica A*, 254, №1, 1-6, (1998).
- [19] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, Noise Enhanced Stability in an Unstable System, *Phys. Rev. Lett.*, 76, №4, 563-566 (1996).
- [20] N.G. Stocks, R. Manella, Field-Induced Stabilization of Activation Processes, *Phys. Rev. Lett.*, 80, №22, 4835-4839 (1998).
- [21] C.R. Doering, J. Godoua, Resonant activation over a fluctuating barrier, *Phys. Rev. Lett.*, 69, №16, 2318-2321 (1992).
- [22] M. Bier, R. Dean Astumian, Matching a diffusive and a kinetic approach for escape over a fluctuating barrier, *Phys. Rev. Lett.*, 71, №10, 1649-1652 (1993).
- [23] P. Pechukas, P. Hanggi, Rates of activated processes with fluctuating barriers, *Phys. Rev. Lett.*, 73, №20, 2772-2775 (1994).
- [24] P. Reimann, P. Hanggi, *Lectures on Stochastic Dynamics*, Springer Series LNP 484, 127 (1997).
- [25] M. Boguna, J. M. Porrá, J. Masoliver, K. Lindenberg, Properties of resonant activation phenomena, *Phys. Rev. E*, 57, №4, 3990-4002 (1998).
- [26] A.L. Pankratov, M. Salerno, Resonant activation in overdamped systems with noise subjected to strong periodic driving, *Phys. Lett. A*, 273, №3, 162-166 (2000).
- [27] A.L. Pankratov, M. Salerno, Adiabatic approximation and parametric stochastic resonance in a bistable system with periodically driven barrier, *Phys. Rev. E*, 61, №2, 1206-1210 (2000).
- [28] T. Zhou, F. Moss, P. Jung, Escape-time distributions of a periodically modulated bistable system with noise, *Phys. Rev. A*, 42, №6, 3161-3169 (1990).
- [29] A.L. Pankratov, Suppression of noise in nonlinear systems subjected to strong periodic driving, *Phys. Rev. E*, 65, №2, 022101-022103 (2002).

- [30] A.L. Pankratov, Optimal pump frequency for ac hysteretic SQUID, *Phys. Rev. B*, 68, №2, 024503-024507 (2003).
- [31] Thirion, C. Switching of magnetization by nonlinear resonance studied in single nanoparticles / C. Thirion, W. Wernsdorfer, and D. Mailly, // *Nature Mat.* - 2003. - Vol. 2, №8. - P. 524-527.
- [32] Schumacher, H.W. Precessional switching of the magnetization in microscopic magnetic tunnel junctions / H.W. Schumacher, C. Chappert, R.C. Sousa, P.P. Freitas, J. Miltat and J. Ferre // *Journ. Appl. Phys.* - 2003. - Vol. 93, №10. - P. 7290-7294; Schumacher, H.W. Effective bit addressing times for precessional switching of magnetic memory cells / H.W. Schumacher, C. Chappert, R.C. Sousa, and P.P. Freitas // *Journ. Appl. Phys.* - 2005. - Vol. 97. - P. 123907.
- [33] Schumacher, H.W. Ballistic bit addressing in a magnetic memory cell array / H.W. Schumacher // *Appl. Phys. Lett.* - 2005. - Vol. 87. - P. 042504.
- [34] Schumacher, H.W. Ultrafast bit addressing in a magnetic memory matrix / H.W. Schumacher // *Journ. Appl. Phys.* - 2005. - Vol. 98. - P. 033910.
- [35] Lyberatos, A. Micromagnetic study of subnanosecond magnetic switching in perpendicular multilayers / A. Lyberatos, G. Ju, R. J. M. van de Veerdonk, and D. Weller // *Journ. Appl. Phys.* - 2002. - Vol. 91, №4. - P. 2236-2242.
- [36] Mantegna, R.N. Experimental Investigation of Resonant Activation / R.N. Mantegna, B. Spagnolo. // *Phys. Rev. Lett.* - 2000. - Vol. 84, N14. - P. 3025-3028.
- [37] Raikher, Yu.L. Stochastic resonance in a superparamagnetic particle / Yu.L. Raikher, V.I. Stepanov, and P.C. Fannin // *Journ. of Magn. and Magn. Materials* - 2003. - Vol. 258-259. - P. 369-371; Kalmykov, Yu.P. Precession-aided magnetic stochastic resonance in ferromagnetic nanoparticles with cubic anisotropy / Yu.P. Kalmykov, Yu.L. Raikher, W.T. Coffey, and S.V. Titov // *Phys. Rev. B.* - 2005. - Vol. 71, №1. - P. 012415-1-012415-4.
- [38] Aharoni, A. Introduction to the theory of ferromagnetism / A. Aharoni. - New York: Oxford University Press, 2000. - p. 320.
- [39] Coffey, W.T. Thermally activated relaxation time of a single domain ferromagnetic particle subjected to a uniform field at an oblique angle to the easy axis: comparison with experimental observations / W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, J.L. Dormann, Yu.P. Kalmykov, E.C. Kennedy, and W. Wernsdorfer // *Phys. Rev. Lett.* - 1998. - Vol. 80, №25. - P. 5655-5658.
- [40] He, L. High speed coherent switching below the Stoner-Wahlfarth limit / L. He, W.D. Doyle, and H. Fujiwara // *IEEE Trans. Mag.* - 1994. - Vol. 30, №6. - P. 4086-4088.
- [41] Weller, D. Thermal effect limits in ultrahigh-density magnetic recording / D. Weller, and A. Moser // *IEEE Trans. on Magn.* - 1999. - Vol. 35, №6. - P. 4423-4439.
- [42] Bertram, H.N. Dynamic-thermal effects in thin film media / H.N. Bertram, Wang Xiaobin, and V.L. Safonov // *IEEE Trans. on Magn.* - 2001. - Vol. 37, №4. - P. 1521-1527.
- [43] Brown, G. Langevin simulation of thermally activated magnetization reversal in nanoscale pillars / G. Brown, M. A. Novotny, and P. A. Rikvold // *Phys. Rev. B.* - 2001. - Vol. 64. - P. 134422.
- [44] Uesaka, Y. Switching time of single magnetic particle and maximum recording frequency of perpendicular magnetic recording / Y. Uesaka, H. Endo, Y. Nakatani, N. Hayashi, and H. Fukushima // *IEEE Trans. on Magn.* - 2006. - Vol. 42, №7. - P. 1892-1895.
- [45] Gao, K.-Z. Fast switching in a single-domain particle under sub-Stoner-Wahlfarth switching fields / K.-Z. Gao, E.D. Boerner and H.N. Bertram // *Appl. Phys. Lett.* - 2002. - Vol. 81, №21. - P. 4008-4010.
- [46] Coffey, W.N. Constant-magnetic-field effect in Neel relaxation of single-domain ferromagnetic particles / W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron. // *Phys. Rev. B.* - 1995. - Vol. 51, №4. - P. 15947-15956.
- [47] D.A. Garanin, Integral relaxation time of single-domain ferromagnetic particles, *Phys. Rev. E*, 54, №4, 3250-3256 (1996).
- [48] Yu.P. Kalmykov, J.L. Dejardin, W.T. Coffey, Relaxation time for nonlinear response of a Brownian particle subject to a step external force: Analytical solutions for one-dimensional models, *Phys. Rev. E*, 55, №3, 2509-2515 (1997).
- [49] A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, Influence of thermal fluctuations on time characteristics of single Josephson element with high damping. Exact solution, *Physica C*, 269, №1-2. 46-54 (1996).
- [50] A.N. Malakhov, Time scales of overdamped nonlinear Brownian motion in arbitrary potential profiles, *Chaos*, 7, №3, 488-504 (1997).
- [51] N.V. Agudov, A.N. Malakhov, On the effect of fluctuations on an intermittent laminar motion, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, 5, №2, 531-536 (1995).
- [52] Pankratov, A.L. Suppression of Timing Errors in Short Overdamped Josephson Junctions / A.L. Pankratov, B. Spagnolo // *Phys. Rev. Lett.* - 2004. - Vol.93, №17. - P. 177001-1-177001-4; Gordeeva, A.V. Minimization of timing errors in reproduction of single flux quantum pulses / A.V. Gordeeva, A.L. Pankratov // *Appl. Phys. Lett.* - 2006. - Vol.88. - P. 022505-1-022505-3.
- [53] Pankratova, E.V. Resonant activation in a stochastic Hodgkin-Huxley model: Interplay between noise and suprathreshold driving effects / E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin, and E. Mosekilde, *Eur. Phys. Journ. B.* - 2005. - Vol. 45, №3. - P. 391-398; Pankratova, E.V. Suppression of noise in FitzHugh-Nagumo model driven by a strong periodic signal / E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin, and B. Spagnolo // *Phys. Lett. A.* - 2005. - Vol. 344, №1. - P. 43-50.
- [54] Zou, Y. Y. Tilted media in a perpendicular recording system for high areal density recording / Y. Y. Zou, J. P. Wang, C. H. Hee, and T. C. Chong // *Appl. Phys. Lett.* - 2003. Vol. 82, №15. - P. 2473-2475.
- [55] Stamps, R.L. Biased switching of small magnetic particles / R.L. Stamps and B. Hillebrands // *Appl. Phys. Lett.* - 1999. - Vol. 75, №8. - P. 1143-1145.

**Случайные процессы в нелинейных системах**  
**Лекция 11. Флуктуации в автоколебательных системах,**  
**форма и ширина линии генерации**

А. Л. Панкратов

Институт физики микроструктур РАН, ГСП 105,  
Нижегород, 603950, Россия. E-mail: alp@ipmras.ru

Определение формы спектральной линии периодического сигнала в некоторых случаях может рассматриваться как конечная цель исследования влияния случайных сил на генератор. Наличие непрерывной части спектра, даже когда оно содержит квазимонохроматическую линию, может ограничивать, например, обнаружение небольших сигналов, расположенных близко к частоте генератора. В этом случае необходимость относительно точного знания спектра очевидна.

С другой стороны, в ряде физических задач рассматривается механизм уширения спектральной линии на основе случайной частотной модуляции. Поэтому определение спектральной формы сигнала с флуктуациями как амплитуды, так и частоты имеет самостоятельное значение.

Будет рассмотрен унифицированный метод определения формы и ширины линии сигнала, имеющего, как правило, коррелированные амплитудные и частотные флуктуации. Анализ проводится как для стационарных, так и для нестационарных флуктуаций амплитуды и частоты. Флуктуации частоты будут рассмотрены подробно и будет описано влияние коррелированных амплитудных и частотных флуктуаций на форму спектральной линии.

**А. Постановка задачи**

1. Колебания любого реального осциллятора имеют флуктуации как амплитуды, так и частоты. В общем случае имеется корреляция между этими флуктуациями. Существование этих флуктуаций приводит к тому, что спектр осциллятора уже не является монохроматической линией. Спектральная линия сигнала принимает определенную, отличную от нуля ширину и определенную форму – некоторую определенную зависимость спектральной плотности мощности от частоты.

Наша задача - определить вид и ширину спектральной линии колебания на основе данных статистических характеристик амплитудных и частотных флуктуаций.

2. Рассмотрим колебания вида [1]:

$$z(t) = R_0[1 + \alpha(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где  $R_0$ ,  $\omega_0$  – средние постоянные значения амплитуды и частоты. Чтобы рассматривать  $z(t)$  как синусоидальное колебание с переменной амплитудой и фазой, функции  $\alpha(t)$  и  $\varphi(t)$  должны быть медленными функциями времени по сравнению с  $\cos(\omega_0 t)$ , что мы будем считать выполненным. Случайная функция  $\alpha(t)$  представляет относительные флуктуации амплитуды и  $\varphi(t)$  – флуктуации фазы, которые равны:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \nu(t) dt, \quad (2)$$

где  $\nu$  – флуктуации частоты. Предположим, что  $\langle \alpha(t) \rangle = \langle \varphi(t) \rangle = \langle \nu(t) \rangle = 0$ , и что мы знаем корреляционные (или структурные) функции  $\Phi_\alpha(\tau)$ ,  $\Phi_\nu(\tau)$ ,  $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$  и соответствующие спектральные плотности  $S_\alpha(\omega)$ ,  $S_\nu(\omega)$ ,  $S_{\alpha\nu}^0(\omega)$ ,  $S_{\alpha\nu}^1(\omega)$ .

Наша конечная цель – получить спектральную плотность  $S_z(\omega)$  колебания  $z(t)$ . Эту спектральную плотность, отсчитываемую от  $\omega = \omega_0$ , мы также будем называть формой спектральной линии, которая будет рассматриваться в частотном диапазоне намного меньше  $\omega_0$  из-за медленности  $\alpha$  и  $\varphi$ .

Вычислим корреляционную функцию сигнала  $z(t)$ , который является сигналом второй группы.

• Будем говорить, что сигнал  $z(t)$  принадлежит второй группе, если его энергия бесконечна и величина

$$S_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle z^2(t) \rangle dt, \quad (3)$$

называемая мощностью сигнала, является конечной величиной. Несколько примеров сигналов второй группы – константа, синусоидальный сигнал, случайная стационарная функция и т.д.

Для сигнала  $z(t)$  необходимо ввести корреляционную функцию второго рода, которая определяется как:

$$\Phi_z(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} K[t, t + \tau] dt. \quad (4)$$

Определим спектральную плотность мощности сигнала  $z(t)$  в виде

$$S_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_z(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (5)$$

Если  $z(t)$  – случайный стационарный процесс с заданной корреляционной функцией  $K_z[\tau]$ , то корреляционная функция второго рода имеет вид  $\Phi_z(\tau) = K_z[\tau]$ , т.е. совпадают с корреляционной функцией.

С помощью формулы (4), определяя  $t + \tau = t'$ ,  $\alpha(t') = \alpha'$ ,  $\varphi(t') = \varphi'$ ,  $\varphi' - \varphi = \Delta\varphi$ , найдем:

$$\Phi_z(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\langle \frac{1}{2} R_0^2 (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') [\cos(\omega_0\tau + \Delta\varphi) + \cos[\omega_0(t + t') + \varphi + \varphi']] \right\rangle dt. \quad (6)$$

Легко видеть, что второй член (косинус суммы) не будет давать вклада в  $\Phi_z(\tau)$ , так как он явно содержит текущее время. Преобразуя косинус, получаем:

$$\Phi_z(\tau) = A^0(\tau) \cos(\omega_0\tau) - A^1(\tau) \sin(\omega_0\tau), \quad (7)$$

где

$$A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \cos(\Delta\varphi) \rangle dt \quad (8)$$

и

$$A^1(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \sin(\Delta\varphi) \rangle dt \quad (9)$$

являются четными и нечетными функциями  $\tau$ , соответственно.

Мы получили общее определение функций  $A^0(\tau)$  и  $A^1(\tau)$ , справедливых как для стационарных, так и для нестационарных флуктуаций  $\alpha(t)$  и  $\Delta\varphi$ . Приращение фазы  $\Delta\varphi$  равно:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi(t) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t) = \int_t^{t+\tau} \nu(\xi) d\xi \quad (10)$$

и в общем случае произвольные флуктуации частоты являются нестационарными функциями времени.

Если  $\alpha(t)$  и  $\Delta\varphi$  являются стационарными и стационарно связанными, то вместо (8), (9) имеем:

$$A^0(\tau) = \frac{1}{2}R_0^2 \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \cos(\Delta\varphi) \rangle, \quad (11)$$

$$A^1(\tau) = \frac{1}{2}R_0^2 \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \sin(\Delta\varphi) \rangle. \quad (12)$$

3. Подставляя (7) в (4), введя частоту  $\Omega = \omega - \omega_0$  и пренебрегая из-за медленности  $\alpha$  и  $\varphi$ , в терминах  $\cos(\omega_0 + \omega)\tau$  and  $\sin(\omega_0 + \omega)\tau$ , получим:

$$S_z(\omega_0 + \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^1(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau.$$

Перейдем от спектральной плотности  $S_z(\omega)$ , распространяющейся как на положительные, так и на отрицательные частоты, к спектральной плотности  $G_z(\omega)$ , определенной только для положительной частоты:

$$G_z(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ 2S_z(\omega), & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Определяя  $W_z(\Omega) = G_z(\omega_0 + \Omega)$ , получаем следующее окончательное выражение для спектральной плотности  $W_z(\Omega)$  – формы спектральной линии колебания:

$$W_z(\Omega) = W_z^0(\Omega) + W_z^1(\Omega), \quad (13)$$

где

$$W_z^0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, \quad (14)$$

$$W_z^1(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^1(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau. \quad (15)$$

Из (13) видно, что в общем случае  $W_z(\Omega)$  не является четной функцией  $\Omega$ , т.е. в общем случае спектральная линия сигнала асимметрична относительно  $\Omega = 0$  (относительно центральной частоты  $\omega_0$ ) и могут быть выделены четная  $W_z^0(\Omega)$  и нечетная  $W_z^1(\Omega)$  части.

Из (15) следует, что асимметрия спектральной линии имеет место при  $A^1(\tau) \neq 0$ . Анализируя (9), легко видеть, что если флуктуации амплитуды и частоты статистически независимы, то:

$$A^1(\tau) = \frac{1}{2}R_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (1 + K_\alpha[t, t + \tau]) \langle \sin(\Delta\varphi) \rangle dt,$$

и это выражение отлично от нуля, если  $\langle \sin(\Delta\varphi) \rangle$  отлично от нуля. Последнее зависит от закона распределения флуктуаций  $\nu(t)$ . Если вероятностное распределение колебаний частоты симметрично, можно показать, что  $\langle \sin(\Delta\varphi) \rangle = 0$ . Следовательно, функция  $A^1(\tau)$  может быть не равна нулю для асимметричного распределения флуктуаций частоты.

Таким образом, асимметрия распределения флуктуаций частоты приводит к асимметрии формы спектральной линии колебаний.

Если распределение  $\nu(t)$  симметрично (что часто бывает на практике), то только корреляция между  $\alpha(t)$  и  $\nu(t)$  может привести к  $A^1(\tau) \neq 0$  и, соответственно, к асимметричной форме спектральной линии.

Заметим, что формулы (14) и (15) представлены в самом общем виде и справедливы для любых законов распределения  $\alpha$  и  $\nu$  и, следовательно, довольно трудно сделать какие-либо конкретные выводы о функциях  $A^0(\tau)$  и  $A^1(\tau)$ . Анализ этих функций и, соответственно,  $W_z(\Omega)$ , возможен только для некоторых частных случаев, большинство из которых будут рассмотрены ниже.

### В. Спектр сигнала, имеющий флуктуации амплитуды.

1. Рассмотрим для общности изложения простейший случай, когда присутствуют только амплитудные флуктуации  $z(t)$  (флуктуации частоты отсутствуют,  $\nu = 0$ ):

$$z(t) = R_0[1 + \alpha(t)] \cos(\omega_0 t).$$

В этом случае  $\Delta\varphi = 0$  и как следует из (8), (9) that

$$A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 [1 + \Phi_\alpha(\tau)],$$

$$A^1(\tau) = 0.$$

Вследствие этого спектр сигнала  $W_z(\Omega)$  симметричен и равен:

$$W_z(\Omega) = W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\Omega\tau) d\tau + \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\alpha(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau.$$

Первый интеграл - дельта-функция, а второй - спектральная плотность амплитудных флуктуации  $S_\alpha(\Omega)$ . Таким образом:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega). \quad (16)$$

В полученном выражении первое слагаемое представляет собой монохроматическую спектральную линию с мощностью  $R_0^2/2$ , а второе – симметричный пьедестал линии, обусловленный флуктуациями амплитуды. Поэтому при флуктуациях амплитуды  $R_0 \neq 0$  не размывается спектральная линия (ее ширина остается равной нулю), а лишь добавляется к монохроматической линии некоторый пьедестал с формой, совпадающей с формой спектра флуктуаций амплитуды.

Пусть теперь  $R_0 = 0$ , но амплитудные флуктуации существуют. Этот случай может возникнуть, в частности, когда осциллятор находится на пороге колебаний, а средняя амплитуда равна нулю. В этом случае для получения спектральной плотности вместо  $\alpha(t)$  следует рассматривать  $\Delta R(t)$ , так как

$$R = R_0 + \Delta R(t).$$

Поскольку  $R_0 = 0$ , выполняя вычисления, получаем, что спектр сигнала по форме совпадает со спектром флуктуаций амплитуды. В этом случае вообще можно сказать, что спектральная линия имеет ширину, равную ширине спектра флуктуаций амплитуды.

### С. Спектр сигнала, имеющий случайную фазу.

1. Рассмотрим сигнал, имеющий только флуктуации фазы:

$$z(t) = R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

В соответствии с (8) - (9) имеем:

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle dt, \\ A^1(\tau) &= \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle \sin(\Delta\varphi) \rangle dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Предположим, что вероятностное распределение нормальное (гауссовское). Тогда (поскольку  $\langle \Delta\varphi \rangle = 0$ )

$$\begin{aligned} \langle \sin(\Delta\varphi) \rangle &= 0, \\ \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle\right] = \exp[-d_\varphi[t, t; \tau]], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $d_\varphi[t, t; \tau]$  является статистической структурной функцией:

$$d_z[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \langle [z(t_1 + \tau) - z(t_1)][z(t_2 + \tau) - z(t_2)] \rangle. \quad (19)$$

В этом случае

$$A^1(\tau) = 0, \quad A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \exp[-d_\varphi[t, t; \tau]] dt \quad (20)$$

и форма спектральной линии симметрична. Пусть теперь флуктуации фазы имеют стационарные приращения ( $\Delta\varphi$  - стационарный процесс); тогда

$$d_\varphi[t, t; \tau] = d_\varphi[0; \tau] = \Delta_\varphi(0, \tau) \equiv \chi(\tau), \quad (21)$$

и, соответственно,

$$A^0(\tau) = A_\chi^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \exp[-\chi(\tau)], \quad (22)$$

где

$$\Delta_z(\theta, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} d_z[t, t + \theta; \tau] dt \quad (23)$$

является структурной функцией второго рода. Для случайного процесса со стационарными приращениями

$$\Delta_z(\theta, \tau) = d_z[\theta; \tau]. \quad (24)$$

Форма спектральной линии, следовательно:

$$W_z(\Omega) = W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\chi(\tau)] \cos(\Omega\tau) d\tau \quad (25)$$

и полностью определяется функцией  $\chi(\tau)$  – структурной функцией второго рода флуктуаций частоты (дисперсии дрейфа фазы за время  $\tau$ ).

Структурная функция  $\chi(\tau)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\chi(0) = 0$ ,
- 2)  $\chi(\tau) \geq 0$ ,
- 3)  $\chi(\tau) = \chi(-\tau)$ .

Поведение  $\chi(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  существенно зависит от характера фазовых флуктуаций. Например, для стационарных фазовых флуктуаций, для которых корреляционная функция существует для любого  $\tau$ , функция  $\chi(\tau)$  всегда ограничена. Для нестационарных фазовых флуктуаций  $\chi(\tau)$  может бесконечно возрастать при  $\tau \rightarrow \infty$ . В настоящем параграфе мы рассмотрим случай ограниченного  $\chi(\tau)$ .

2. Let stationary fluctuations of the phase have finite intensity  $\langle \varphi^2 \rangle = \Phi_\varphi(0)$ . Then on the basis of definition of  $\chi(\tau)$  we have:

$$\chi(\tau) = \Phi_\varphi(0) - \Phi_\varphi(\tau).$$

Therefore, the function  $\chi(\tau)$  is restricted due to restricted  $\langle \varphi^2 \rangle$ . The width of the function  $\chi(\tau)$  may be expressed as  $2\tau_0$ , where  $\tau_0$  is actually correlation time of phase fluctuations. For the considered case of restricted  $\chi(\tau)$  it is expedient to slightly change notations of functions  $A_\chi^0(\tau)$  and  $W_{z\chi}^0(\tau)$ . We will write them as  $A_\varphi^0(\tau)$  and  $W_{z\varphi}^0(\tau)$ . The sense of these notations will become clear a bit below.

Let us represent the exponent in (25) in the form:

$$e^{-\chi(\tau)} = e^{-\Phi_\varphi(0) + \Phi_\varphi(\tau)} = e^{-\langle \varphi^2 \rangle + \Phi_\varphi(\tau)} = e^{-\langle \varphi^2 \rangle} + e^{-\langle \varphi^2 \rangle} [e^{\Phi_\varphi(\tau)} - 1] + e^{-\langle \varphi^2 \rangle}. \quad (26)$$

Then the integral (25) takes the form:

$$W_z(\Omega) = W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle \varphi^2 \rangle} \delta(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle \varphi^2 \rangle} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\Phi_\varphi(\tau)} - 1] \cos(\Omega\tau) d\tau. \quad (27)$$

It is seen, that the spectrum of the signal consists from the monochromatic line of the power  $\frac{R_0^2}{2} e^{-\langle \varphi^2 \rangle}$  and the pedestal equals the second term in (27).

Thus, stationary phase fluctuations as well as amplitude fluctuations do not dither spectral line and create only an additional pedestal.

#### D. Spectrum of a signal, having fluctuations of frequency.

Distinguishing of cases of phase fluctuations  $\varphi(t)$  and frequency fluctuations  $\nu(t)$  into two different paragraphs is in some way nominal, since they are connected by relation:

$$\varphi(t) = \int \nu(t) dt$$

and always simultaneously exist. Nevertheless, such distinguishing may be justified by the fact, that spectra of signals, having fluctuations of phase and frequency with the same statistical characteristics are significantly different. In the previous paragraph we have seen that stationary fluctuations of the phase lead to the spectrum, consisting of monochromatic line and pedestal. It will be demonstrated in the present paragraph that stationary fluctuations of frequency lead to dithering of spectral line; the line is not any more monochromatic, but has some width  $\Delta\Omega > 0$ . This is due to infinity of the function  $\chi(\tau)$  or infinity of more general characteristic –  $d_\varphi[t, t; \tau]$  for  $\tau \rightarrow \infty$ .

Thus, the present paragraph will be different from the previous one: we will deal with such  $d_\varphi[t, t; \tau]$  which infinitely grows for  $\tau \rightarrow \infty$ .

1. So, let us consider the signal, having frequency fluctuations:

$$z(t) = R_0 \cos \left[ \omega_0 t + \int \nu(t) dt \right].$$

Functions  $A^0(\tau)$ ,  $A^1(\tau)$  are given by formulas (17),  $\Delta\varphi$  – phase increment during time  $\tau$  – by formula (10).

Let us suppose that fluctuations of frequency (or phase) are such, that there exists nonzero linewidth  $\Delta\Omega$ . This linewidth may be defined by different ways. From the point of view of mathematical analysis, the most efficient is the energetic definition. For that it is enough to define the linewidth on the basis of even part of shape of the spectral line  $W_z^0(\Omega)$ . Let us substitute  $W_z^0(\Omega)$  by the rectangle with the equal square with the height  $W_z^0(0)$ . Then the width of this rectangle we take as the width of the spectral line  $\Delta\Omega$ .

The whole square under the curve  $W_z^0(\Omega)$  (that is equal to the square under the curve  $W_z(\Omega)$ ) is the energy of the signal  $z(t)$ , equals  $R_0^2/2$ . Therefore (see (14)),

$$\Delta\Omega = \frac{R_0^2}{2W_z^0(0)} = \frac{\pi R_0^2}{2 \int_0^\infty A_0(\tau) d\tau} = \frac{\pi}{\int_0^\infty d\tau \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle dt}. \quad (28)$$

If fluctuations of phase have stationary increments, then

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{\int_0^\infty \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle d\tau}. \quad (29)$$

If in addition fluctuations are normally distributed, then:

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{\int_0^\infty \exp[-\chi(\tau)] d\tau}. \quad (30)$$

The latter formula allows to find a condition for  $\chi(\tau)$ , required for existence of dithering of a linewidth.

If, e.g.,  $\chi(\tau)$  is restricted for  $\tau \rightarrow \infty$  (i.e. exist  $\chi_\infty < \infty$ ), then it is easy to see, that the integral in (30) diverges and, correspondingly, the width of the spectral line  $\Delta\Omega$  becomes zero. As it has been demonstrated in previous paragraphs, this corresponds to monochromatic line in the spectrum of  $z(t)$ . Therefore, we indeed have  $\Delta\Omega = 0$ , if the spectrum of the signal contains a monochromatic line.

In order to have  $\Delta\Omega > 0$ , the finity of the integral  $\int_0^\infty \exp[-\chi(\tau)] d\tau$  is needed, which leads to infinite  $\chi(\tau)$  for  $\tau \rightarrow \infty$ . **Therefore, the spectral width is dithered only in the case when  $\chi(\tau) \rightarrow \infty$  for  $\tau \rightarrow \infty$ .**

This means that the spectral line may be dithered only by nonstationary phase fluctuations. Indeed, since  $\chi(\tau) = d_\varphi[0; \tau] = \frac{1}{2} \langle [\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]^2 \rangle$ , supposing, e.g.,  $t = 0$  and  $\varphi(0) = 0$ , we find  $\chi(\tau) = \frac{1}{2} \langle \varphi(\tau)^2 \rangle$ . Indefinite increase of  $\chi(\tau)$  for  $\tau \rightarrow \infty$  means here time dependence of  $\langle \varphi(\tau)^2 \rangle$  for any  $\tau$  as function of  $\tau$  (nonstationarity of phase fluctuations).

Let us note also: higher increase of  $\chi(\tau)$  with  $\tau$  – smaller integral in the denominator of (30) and wider linewidth  $\Delta\Omega$ .

2. Let us start the analysis from the case when  $\varphi(t)$  is a process with stationary increments and distribution of  $\nu(t)$  is an arbitrary function. In this case

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle, \quad A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \langle \sin \Delta\varphi \rangle \quad (31)$$

and components of the spectral line equal:

$$\begin{aligned} W_z^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \cos \Delta\varphi \rangle \cos \Omega\tau d\tau, \\ W_z^1(\Omega) &= \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \sin \Delta\varphi \rangle \sin \Omega\tau d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Let us consider the first limiting case: frequency fluctuations  $\nu$  represents as slow as possible stationary process. Let the distribution law of  $\nu$  is arbitrary and the probability density equals  $W_\nu(\nu)$ . For as slow as possible process

$$\Delta\varphi = \int_t^{t+\tau} \nu(\xi) d\xi = \nu\tau.$$

From this we get:

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= \frac{R_0^2}{2} \langle \cos \nu\tau \rangle = \frac{R_0^2}{2} \int \cos \nu\tau W_\nu(\nu) d\nu = \frac{R_0^2}{2} \int W_\nu^0(\nu) \cos \nu\tau d\nu, \\ A^1(\tau) &= \frac{R_0^2}{2} \langle \sin \nu\tau \rangle = \frac{R_0^2}{2} \int \sin \nu\tau W_\nu(\nu) d\nu = \frac{R_0^2}{2} \int W_\nu^1(\nu) \sin \nu\tau d\nu, \end{aligned}$$

where  $W_\nu^0(\nu)$  and  $W_\nu^1(\nu)$  are even and odd components of the probability density  $W_\nu(\nu) = W_\nu^0(\nu) + W_\nu^1(\nu)$ . The obtained expressions demonstrate that  $A^0(\tau)$  is Fourier conjugated of  $W_\nu^0(\nu)$ , and  $A^1(\tau)$  - Fourier conjugated of  $W_\nu^1(\nu)$ . On the other hand, formulas (14) and (15) shows that  $A^0(\tau)$  and  $A^1(\tau)$  are Fourier conjugated of  $W_z^0(\Omega)$  and  $W_z^1(\Omega)$ . Therefore,  $W_z^0(\Omega)$  and  $W_z^1(\Omega)$  are proportional to  $W_\nu^0(\nu)$  and  $W_\nu^1(\nu)$ , respectively. Defining the proportionality coefficient from the normalization conditions, we get:

$$W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} W_\nu^0(\nu), \quad W_z^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} W_\nu^1(\nu).$$

Summing these equalities we get:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} W_\nu(\nu). \quad (33)$$

The form of spectral line of the signal, having as slow as possible frequency fluctuations, coincides with the shape of their probability distribution. This case may be called "case of technical fluctuations of frequency because, as it will be seen below, in oscillators slow quasistatic fluctuations of frequency are mainly originated from flicker noise - "technical" reasons. On the basis of (28) the width of spectral line is equal to  $\Delta\Omega = W_\nu^{-1}(0)$ .

With the usual assumption of Gaussian frequency fluctuations we get well-known Doppler form (or Gaussian, or technical form) of the spectral line equals

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \nu^2 \rangle}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\langle \nu^2 \rangle}} \quad (34)$$

with the width

$$\Delta\Omega = \sqrt{2\pi \langle \nu^2 \rangle}, \quad (35)$$

where  $\langle \nu^2 \rangle$  is a variance of frequency fluctuations which is supposed to be known.

Let us consider now the second limiting case. Let us suppose, that fluctuations of frequency is a delta-correlated stationary random process with the correlation function:

$$\Phi_\nu(\tau) = D\delta(\tau);$$

and the distribution function of  $\nu$  is arbitrary. In this case the phase increment  $\Delta\varphi$ , given by Eq. (10) represents a sum of infinitely large number of independent variables and therefore has normal distribution independently of distribution of  $\nu(t)$ .

If frequency fluctuations  $\nu(\tau)$  represents stationary process and almost for all  $\tau$  exist  $\Phi_\nu(\tau)$ , then it is not difficult to express  $\chi(\tau)$  via  $\Phi_\nu(\tau)$ . It can be demonstrated that:

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \Phi_\nu(\xi - \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{+\tau} (\tau - |\xi|) \Phi_\nu(\xi) d\xi. \quad (36)$$

It is not difficult to express  $\chi(\tau)$  via spectral density  $S_\nu(\omega)$  of frequency fluctuations. Substituting into Eq. (36) the expression  $\Phi_\nu(\tau)$  via  $S_\nu(\omega)$  and integrating over  $\tau$  we get

$$\frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle = \chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega\tau}{\omega^2} S_\nu(\omega) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} S_\nu(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2}. \quad (37)$$

Besides properties of the function  $\chi(\tau)$ , mentioned in the previous paragraph, on the basis of (36), it is easy to discover the following properties:

$$\frac{d}{d\tau} \chi(\tau) = \int_0^\tau \Phi_\nu(\tau) d\tau, \quad \left[ \frac{d}{d\tau} \chi(\tau) \right]_{\tau=0} = 0. \quad (38)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \chi(\tau) = \Phi_\nu(\tau), \quad \left[ \frac{d^2}{d\tau^2} \chi(\tau) \right]_{\tau=0} = \langle \nu^2 \rangle. \quad (39)$$

For delta-correlated frequency fluctuations we have from (36)

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} D |\tau|.$$

This formula expresses the so-called diffusive law of phase fluctuations – the mean square of phase increment during time  $\tau$  is proportional to  $\tau$ .

Due to Gaussian distribution of  $\Delta\varphi$  we have

$$\langle \cos(\Delta\phi) \rangle = \exp \left[ -\frac{D}{2} |\tau| \right], \quad \langle \sin(\Delta\phi) \rangle = 0.$$

Taking into account (32), one can finally obtain:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} D |\tau| \right] \cos \Omega\tau d\tau = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D/2}{(D/2)^2 + \Omega^2}. \quad (40)$$

The obtained form of the line is well-known Lorentzian or resonant (or natural) form of spectral line. As follows from the above presented, for its realization it is only necessary to assume delta-correlated frequency fluctuations. On the basis of (30), the linewidth of this spectral line is equal to:

$$\Delta\Omega = \frac{\pi D}{2}. \quad (41)$$

The consideration of the form of spectral line for arbitrary law of distribution of frequency fluctuations is restricted by the two above mentioned cases.

3. Significantly more detailed analysis may be performed for normally distributed stationary fluctuations of frequency. Let us consider this case. Let fluctuations of frequency  $\nu(t)$  are stationary and normally distributed,  $\langle \nu(t) \rangle = 0$  with the given correlation function  $\Phi_\nu(\tau)$  and spectral density  $S_\nu(\Omega)$ . On the basis of (10) the phase increment  $\Delta\varphi$  will be stationary process, having normal symmetric distribution. Therefore, the shape of spectral line will be described by Eq. (25) and the width – by Eq. (30).

Combining (25) and (36) we get the following expression for the shape of spectral line:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ - \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_\nu(\xi) d\xi \right] \cos \Omega\tau d\tau, \quad (42)$$

which we will analyze.

Let us consider, how different characteristics of frequency fluctuations influence the form of the line  $W_z(\Omega)$ . Let us define the correlation time  $\tau_0$  as:

$$\tau_0 = \frac{1}{2\Phi_\nu(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\nu(\tau) d\tau = \frac{\pi S_\nu(0)}{\langle \nu^2 \rangle}. \quad (43)$$

Let us define the spectral width as  $\Omega_0 = \tau_0^{-1}$ . Then it is obvious that

$$\Omega_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\langle \nu^2 \rangle}{S_\nu(0)}. \quad (44)$$

Let the spectrum of fluctuations of frequency is such that:  $\pi S_\nu(0) \gg \Omega_0$  (i.e. the spectrum is narrow and tall). In this case with the help of (43), (44) we get that:

$$m \equiv \langle \nu^2 \rangle \tau_0^2 = \frac{\pi S_\nu(0)}{\Omega_0} \gg 1. \quad (45)$$

Let us call the quantity  $m$  the modulation index.

The case of  $m \gg 1$  is the case of slow (large  $\tau_0$ ) and large (large variance  $\langle \nu^2 \rangle$ ) frequency fluctuations. It can be demonstrated, that if the condition (45) is fulfilled the shape of the spectral line is approximately equal to:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \nu^2 \rangle}} \exp \left\{ - \frac{\Omega^2}{2 \langle \nu^2 \rangle} \right\},$$

i.e. coincides with the doppler form, which we already obtained above (see (34)) with supposition of as slow as possible  $\nu(t)$ .

Thus, the first limiting case is approximately realized for  $\pi S_\nu(0) \gg \Omega_0$ .

Let now the spectrum of frequency fluctuations is such that  $\pi S_\nu(0) \ll \Omega_0$ . Then

$$m \equiv \langle \nu^2 \rangle \tau_0^2 = \frac{\pi S_\nu(0)}{\Omega_0} \ll 1, \quad (46)$$

and we have the case of fast (small  $\tau_0$ ) and small (small  $\langle \nu^2 \rangle$ ) frequency fluctuations. It can be demonstrated that in this case the form of spectral line is approximately equal to (compare with (40)):

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \nu^2 \rangle \tau_0}{(\langle \nu^2 \rangle \tau_0)^2 + \Omega^2}.$$

Since  $\langle \nu^2 \rangle \tau_0 = \pi S_\nu(0)$ , then the form of spectral line is approximately equal to:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\pi S_\nu(0)}{(\pi S_\nu(0))^2 + \Omega^2}. \quad (47)$$

This is resonant (Lorentzian) shape of line and its width equals:

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_\nu(0) = \pi m \Omega_0, \quad (48)$$

i.e. it only depends on the value of spectral density of frequency fluctuations at zero frequency.

Thus, the second limit case leading to resonant form of spectral line is realized approximately for  $\pi S_\nu(0) \ll \Omega_0$ , i.e. in this case the frequency fluctuations are rather fast. This kind of spectrum of frequency fluctuations is generated either by thermal or shot fluctuations as it will be demonstrated below.

---

[1] А.Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах - М.: Наука, 1968. - с. 660.



Институт Физики  
Микроструктур РАН



Центр криогенной наноэлектроники  
Нижегородский государственный  
технический университет им. Р.Е. Алексеева



**НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**  
Национальный исследовательский университет

# Случайные процессы в нелинейных системах

**Панкратов А.Л.**

# Иерархия шумов

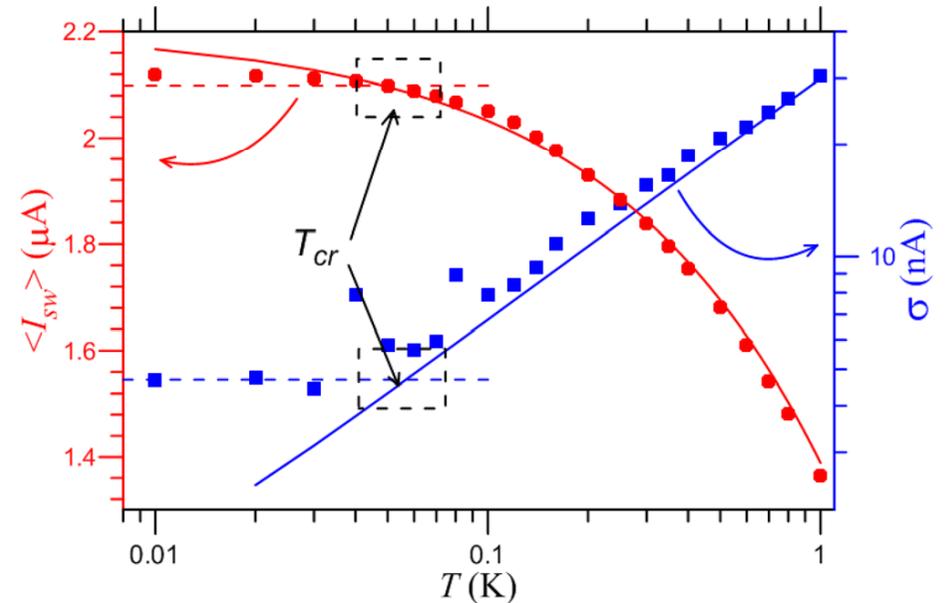
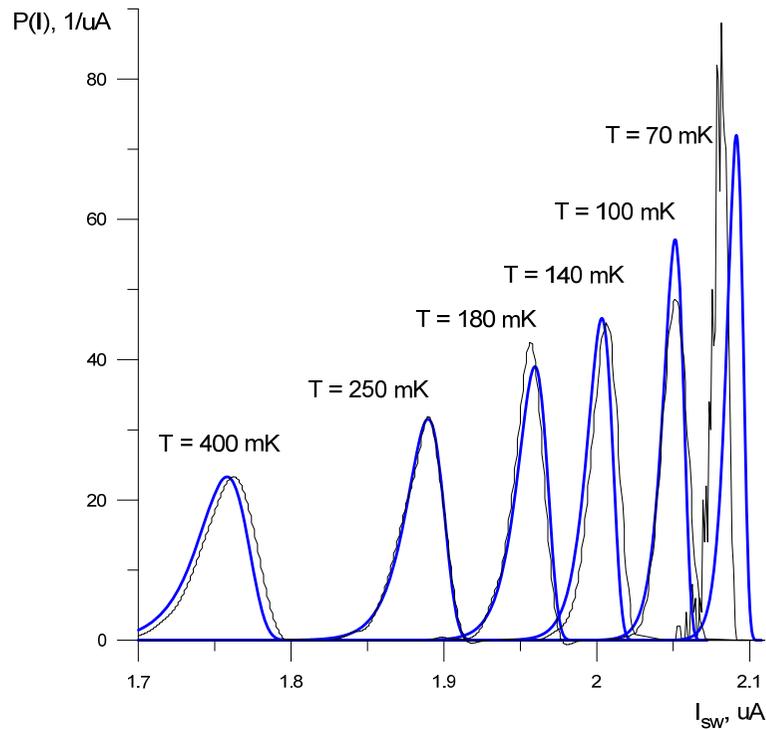
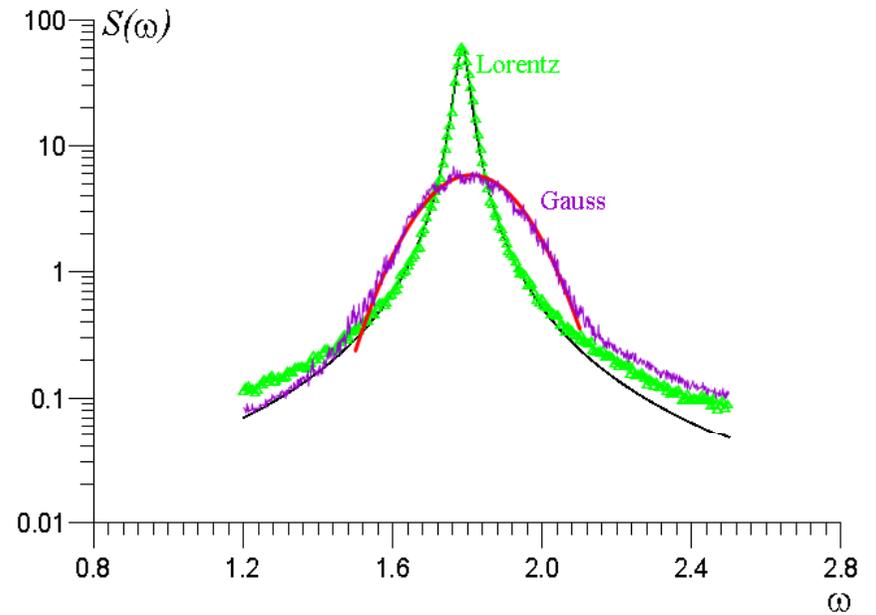
Технические шумы (узкополосные)

Естественные шумы (широкополосные):

Тепловой шум  $S_I(\omega) \sim kT/R$

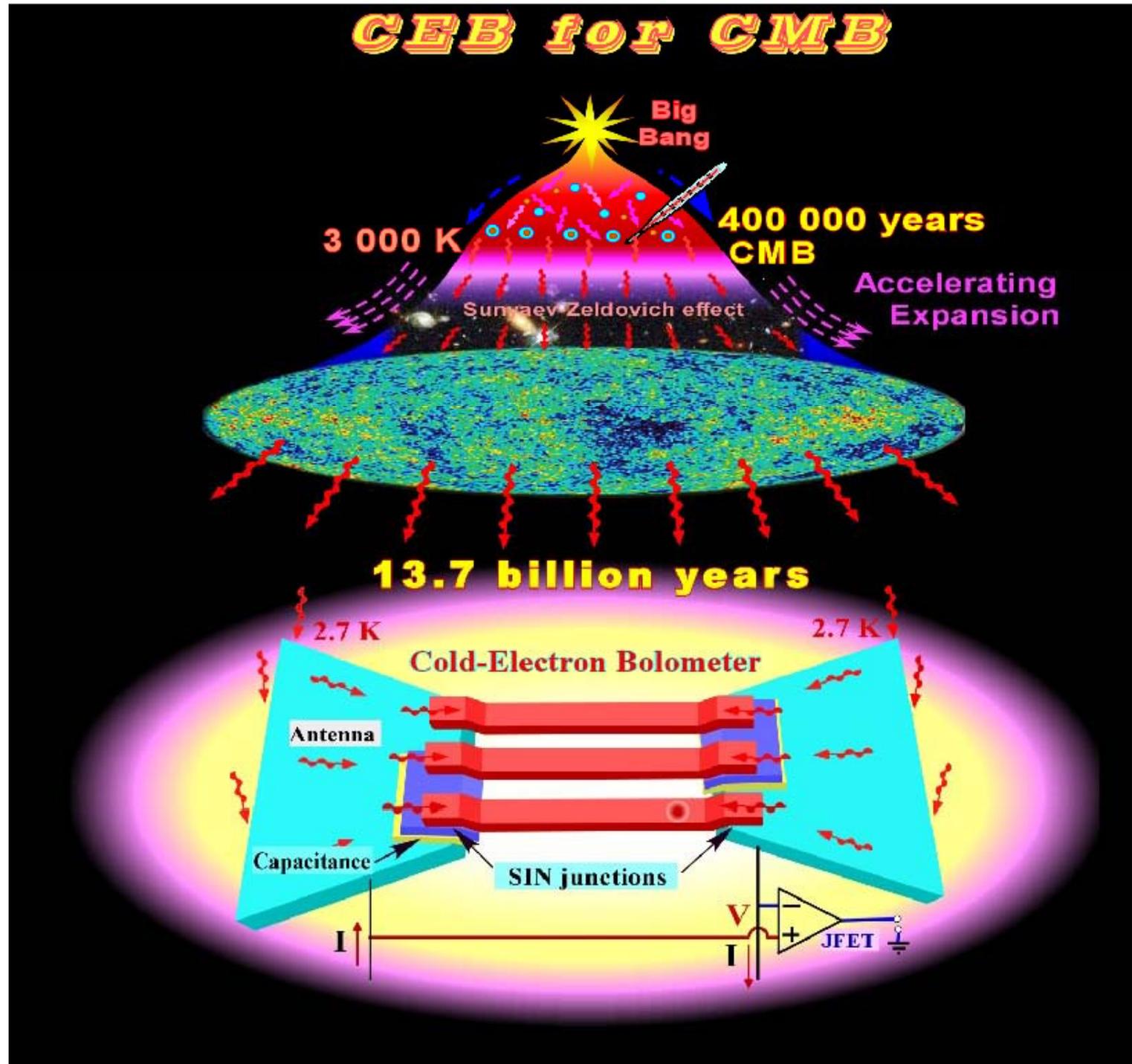
Дробовой шум  $S_I(\omega) \sim eI/2$

Квантовый шум  $S_I(\omega) \sim h\omega/R$

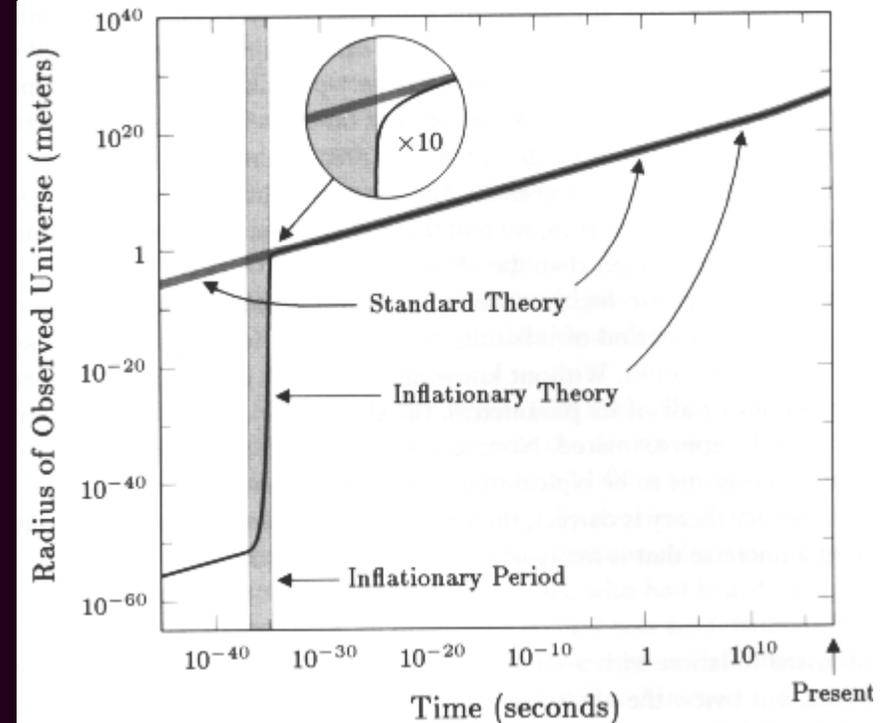
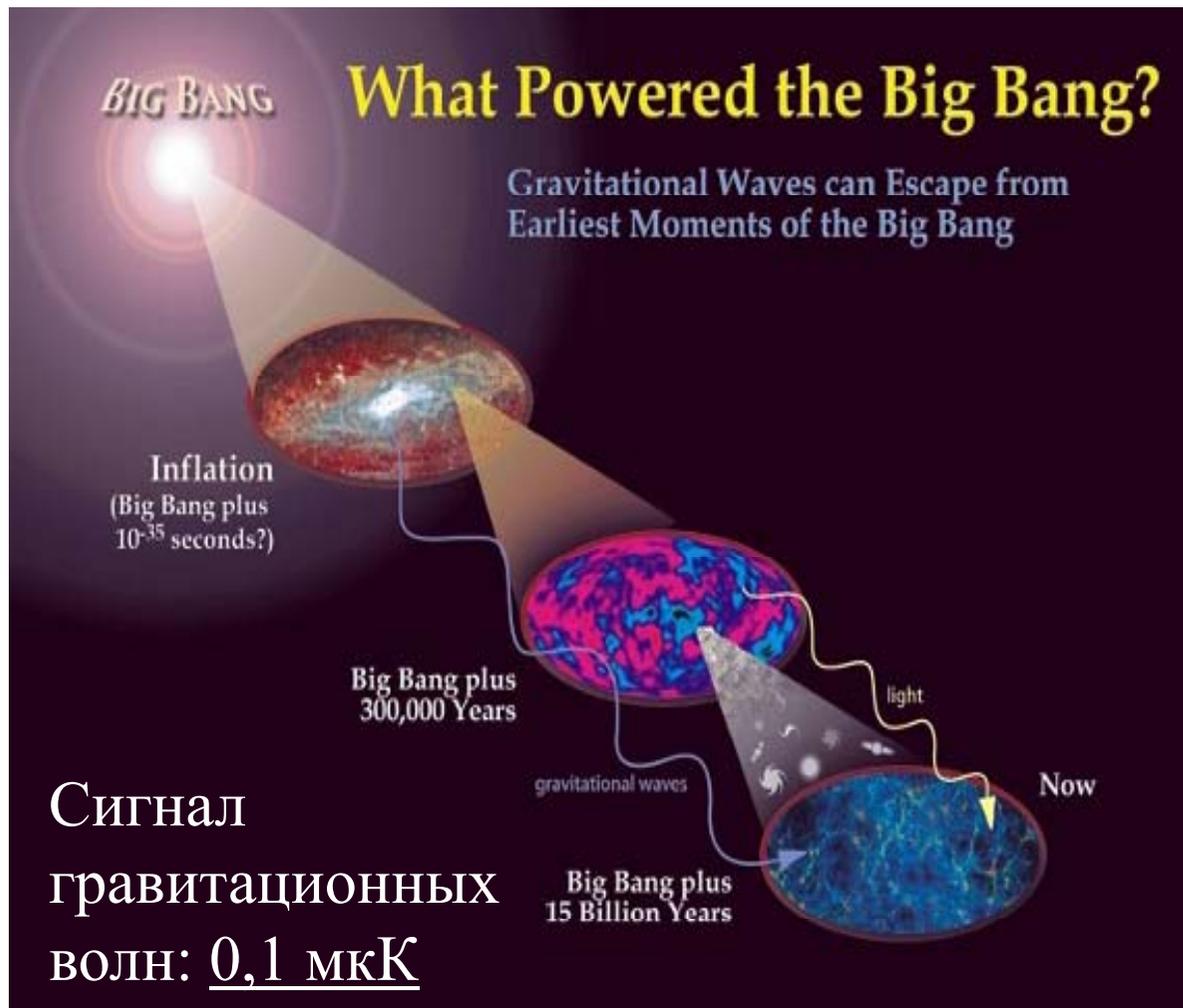


# Cosmic Microwave Background (CMB) radiation

We collect CMB radiation from  $R \sim 1 \cdot 10^{23} \text{ km} = 100 \text{ Yottameters}$  to volume  $\sim 0.01 \mu\text{m}^3$  ( $w=100 \text{ nm}, h=10 \text{ nm}$ )

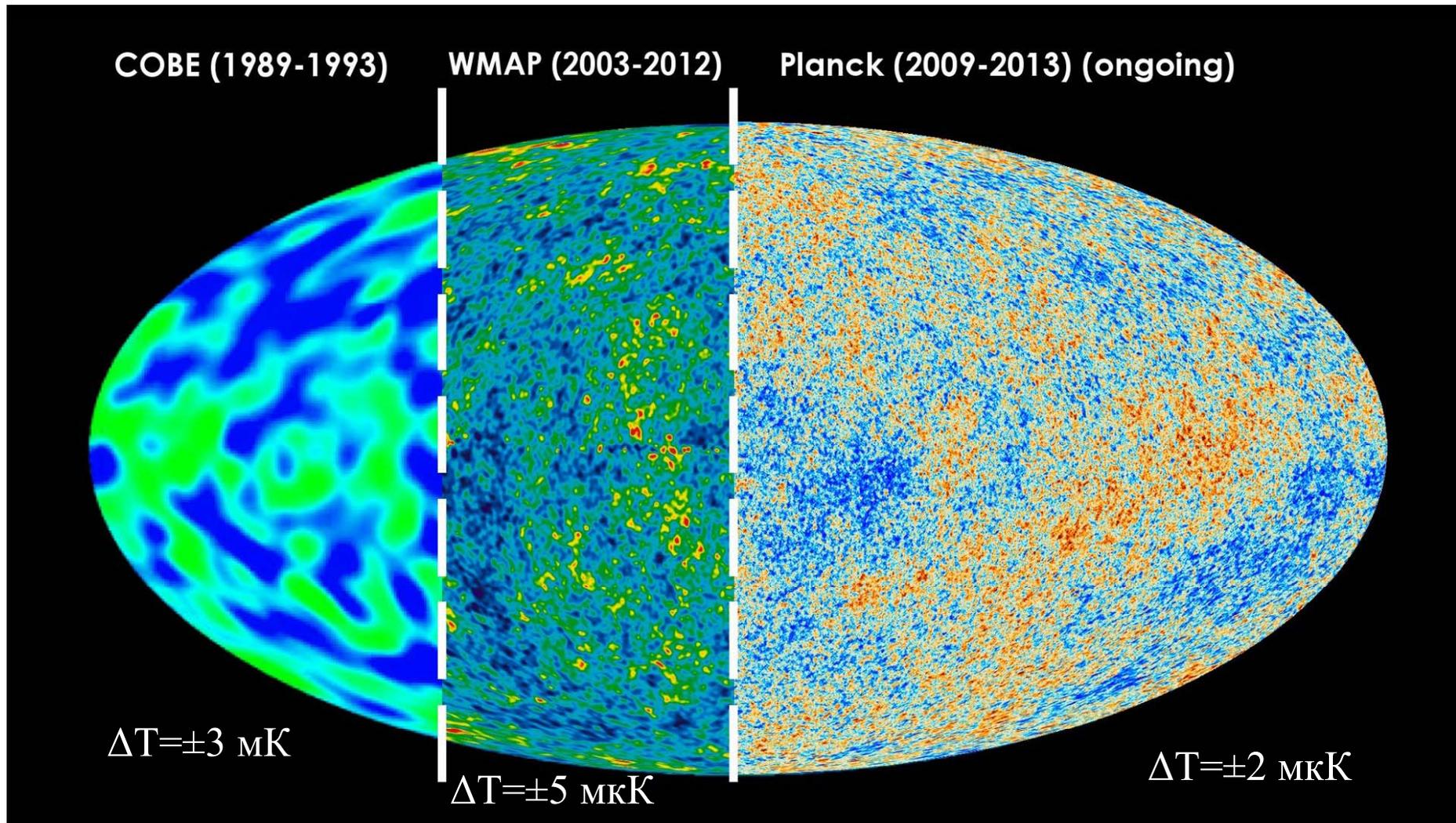


# Gravitational wave imprints in B-mode polarization of the CMB.



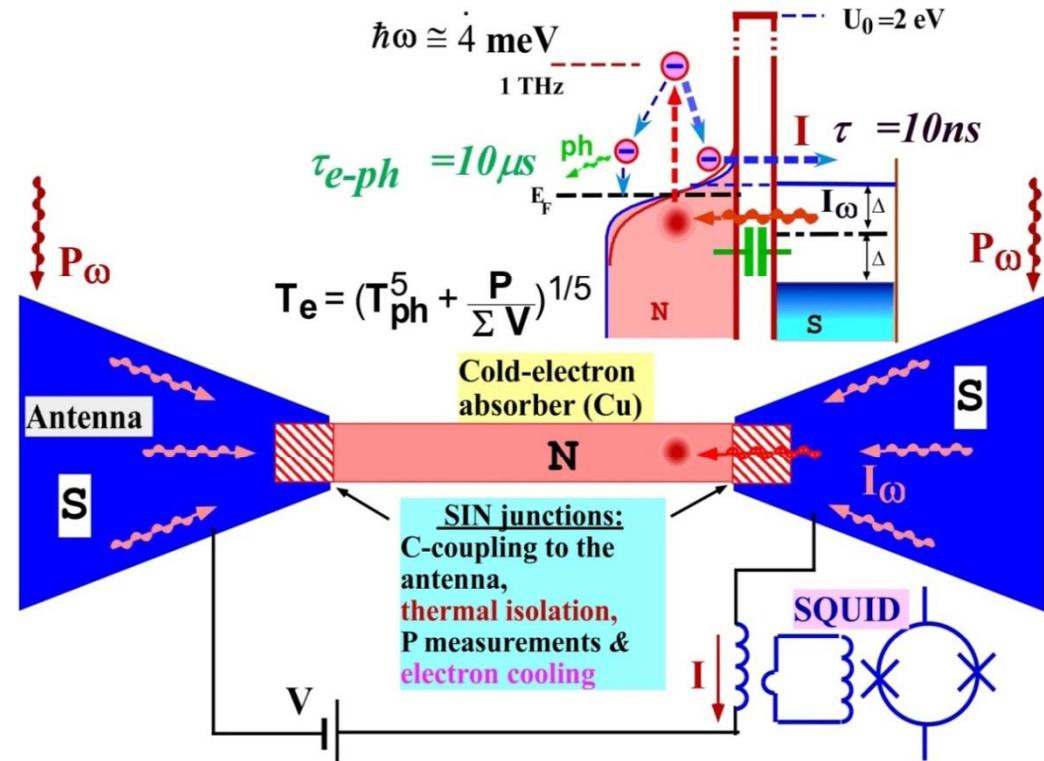
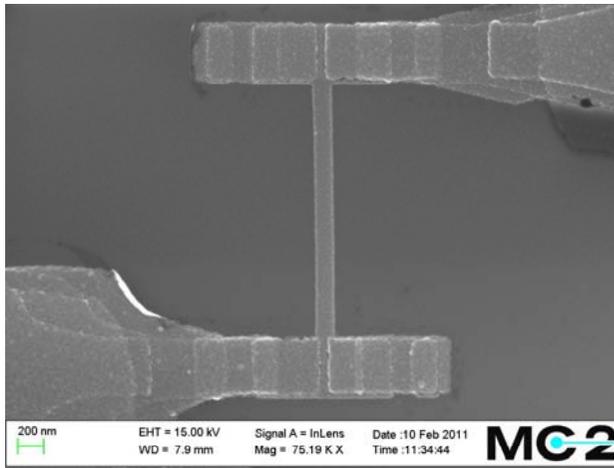
In the 1990s, physicists theorized that rapid inflation during the big bang would also generate **gravity waves**, which would leave their mark by polarizing light in the cosmic afterglow. Extremely sensitive telescopes at the South Pole have detected such skewed light waves, but scientists have spent almost a decade ensuring that the phenomenon was not the result of other factors.

# Measured CMB temperature



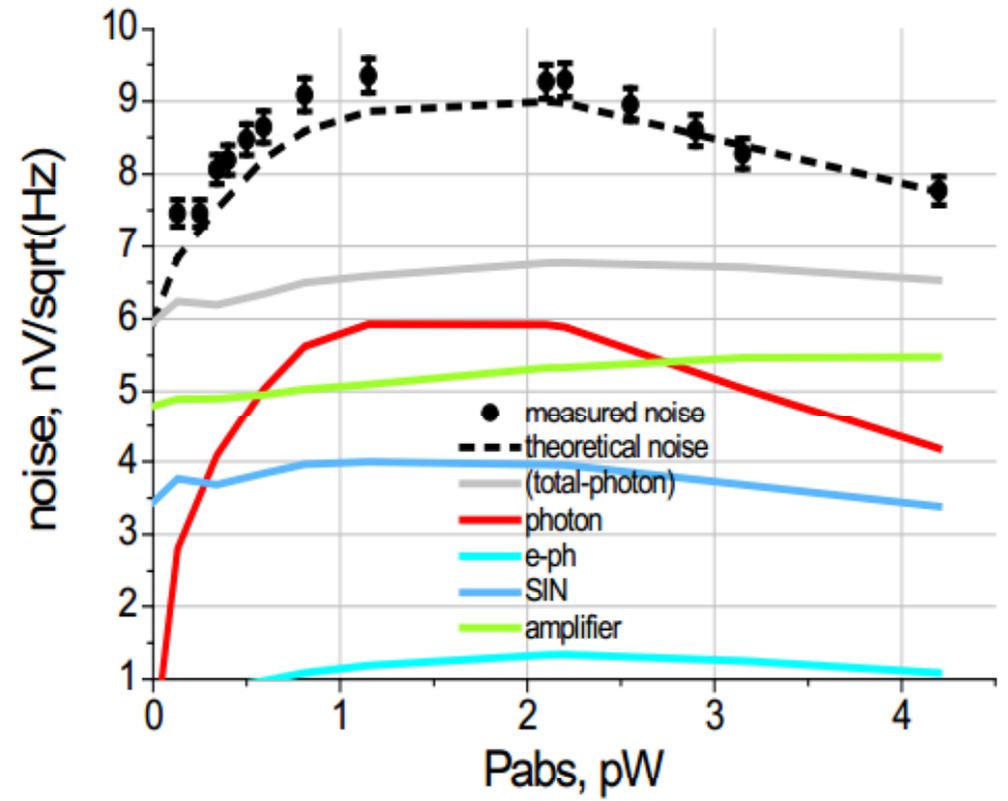
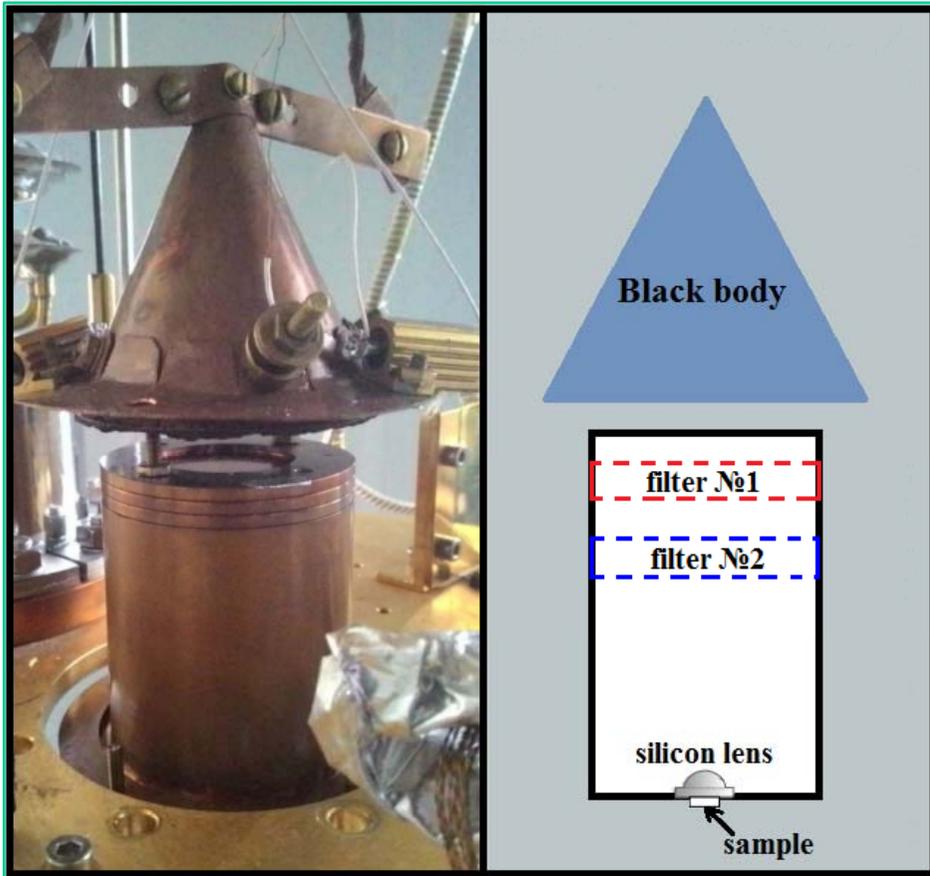
Реликтовый фон Вселенной  
5  $T = 2,7 \text{ К} \sim f_{\text{max}} = 160,2 \text{ ГГц}$

# Cold-Electron Bolometer (CEB) with Capacitive Coupling to the Antenna



## Main features of the CEB:

1. High sensitivity due to electron cooling effect:
2. High dynamic range due to direct electron cooling
3. Very easy to fabricate in arrays on planar substrate
4. Insensitivity to Cosmic Rays
5. Resonance Cold-Electron Bolometer (RCEB) for Multi-Frequency Pixels



# Balloon telescope OLIMPO

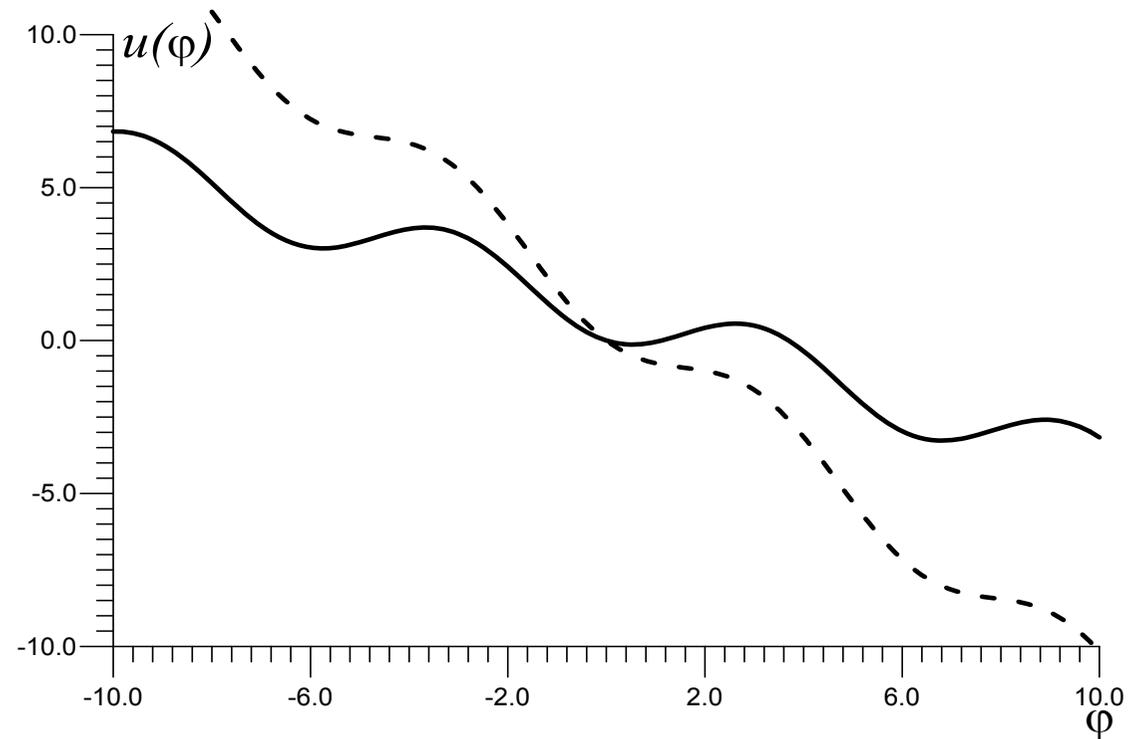
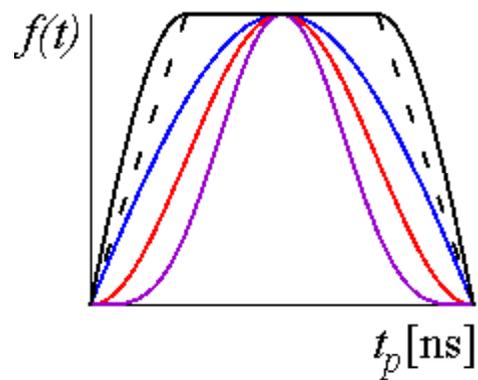
- Channel III: 350 GHz
- Number of pixels: 23
- Background Power load :  $P_0 = 40 \text{ pW}$  – photometer

$$NEP_{phot} = \sqrt{2P_0 * hf} = 1.3 * 10^{-16} \text{ W / Hz}^{1/2}$$

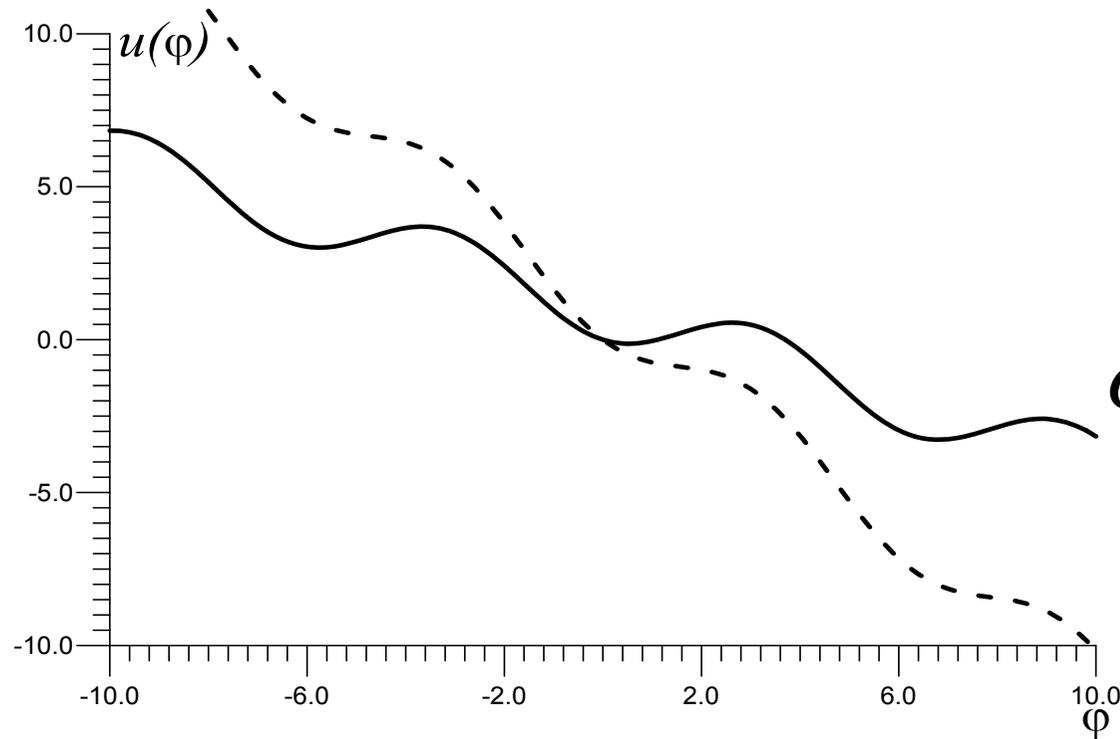
- The NEP of bolometer:  $NEP_{bol} < NEP_{phot}$ .
- Measuring both polarization components
- Insensitive to cosmic rays!
- Reliable bolometers
- Launch – June 2017



# Что мы понимаем под переключением?



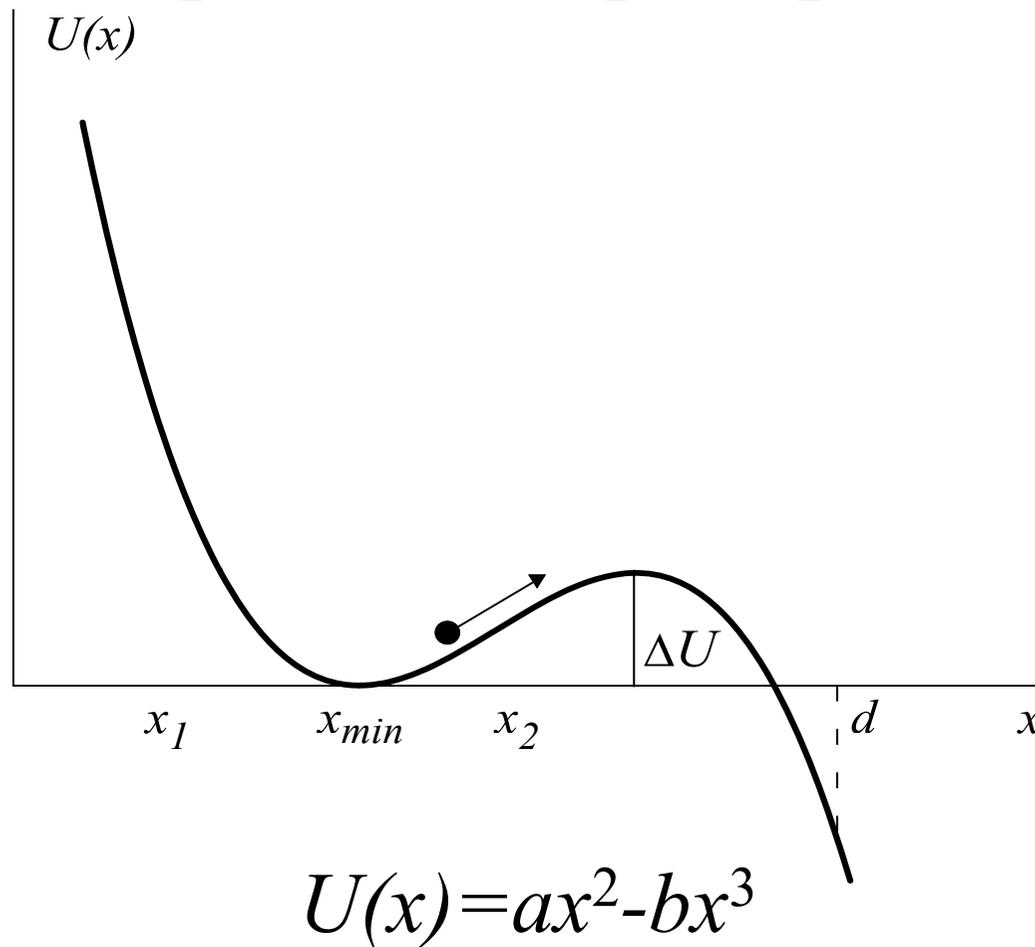
# Что мы понимаем под минимизацией шумов?



$$\sigma \sim e^{\Delta U / kT}$$

$$\sigma \sim \sqrt{kT}$$

# Проблема Крамера



H.Kramers, Physica 7, 284 (1940).

P. Hanggi, P. Talkner, M. Borkovec, Reaction-rate theory: fifty years after Kramers, Rev. Mod. Phys. 62, 251-341 (1990).

V.I. Melnikov, The Kramers problem: Fifty years of development, Phys. Rep. 209, 1-71 (1991)

# Уравнения Ланжевена и Фоккера-Планка

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dU(x)}{dx} + \xi(t)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = D \delta(\tau), \quad D = 2kT/h$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{du(x)}{dx} W(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} W(x,t) \right]$$

$$B = 1/D, \quad u(x) = U(x)/kT, \quad W(c,t) = 0, \quad G(d,t) = 0.$$

- Безразмерное уравнение ФП

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{du(x)}{dx} W(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) \right]$$

- Замена функции:

$$W(x, t) = \Psi(x, t) e^{-\frac{u(x)}{2}}$$

- Замена времени:

$$t = i\tau$$

- Безразмерное уравнение Шредингера

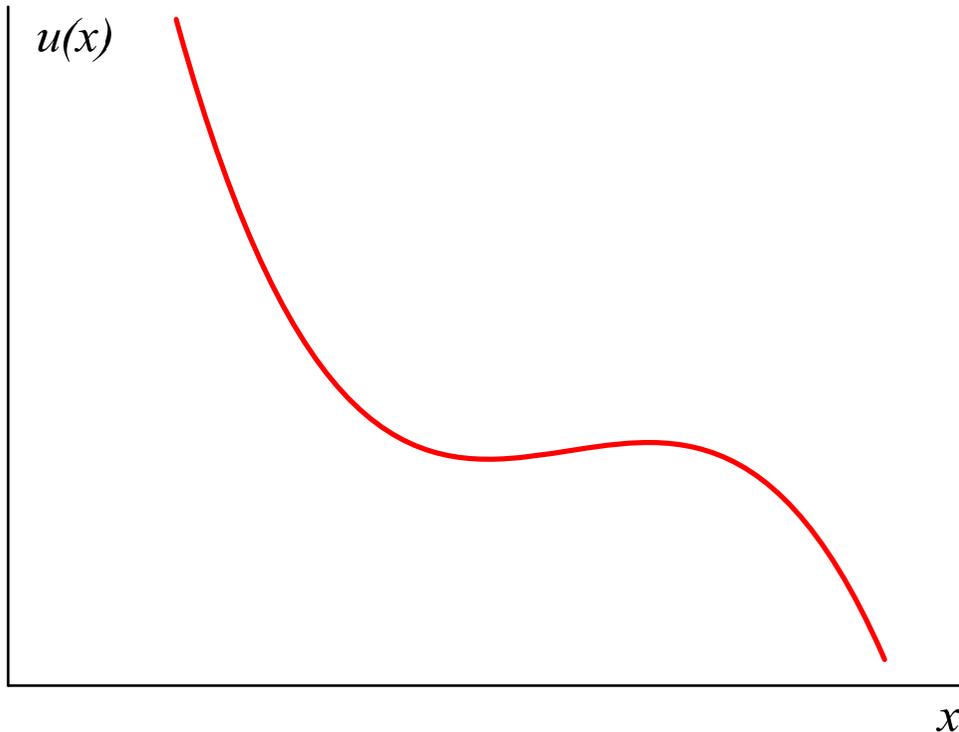
$$\frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} = iD \left[ \frac{\partial^2 \psi(x, \tau)}{\partial x^2} - V(x) \psi(x, \tau) \right]$$

- Связь потенциалов в уравнении ФП и Шредингера

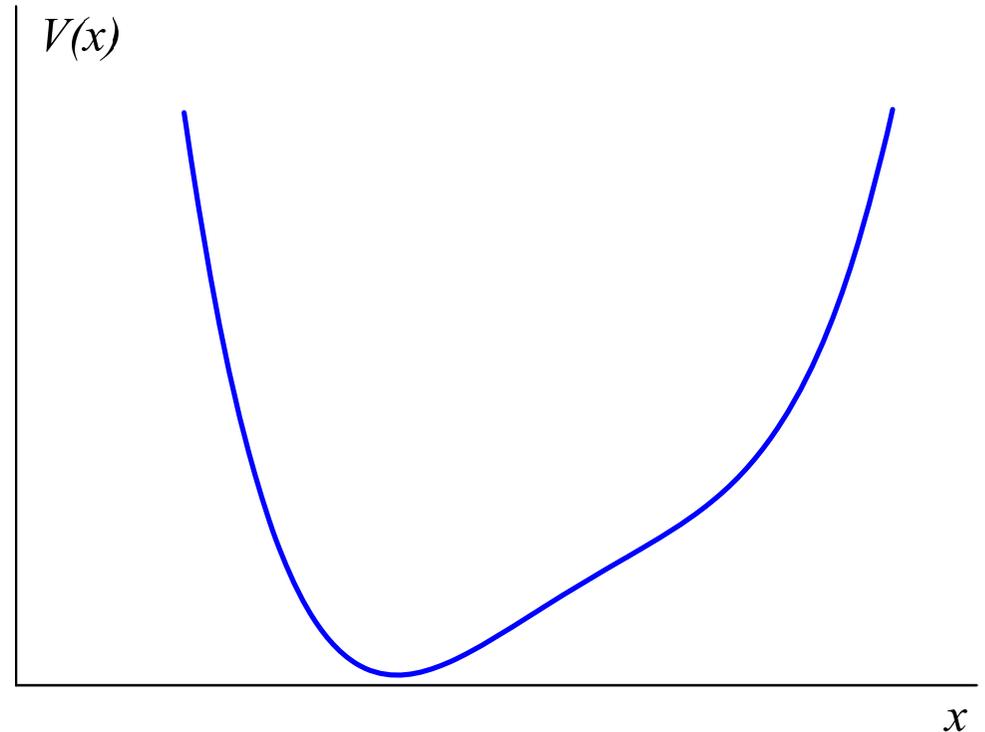
$$V(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} \frac{du(x)}{dx} \right)^2$$

M. Bernstein and L.S. Brown, Supersymmetry and the Bistable Fokker-Planck Equation, Phys. Rev. Lett., **52**, 1933 (1984).

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{du(x)}{dx} W(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} W(x,t) \right] \quad \frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial \tau} = iD \left[ \frac{\partial^2 \psi(x,\tau)}{\partial x^2} - V(x)\psi(x,\tau) \right]$$



$$u(x) = x^2 - x^3$$



$$V(x) = (3x^2/2 - x)^2 + 3x - 1$$

# Временные характеристики

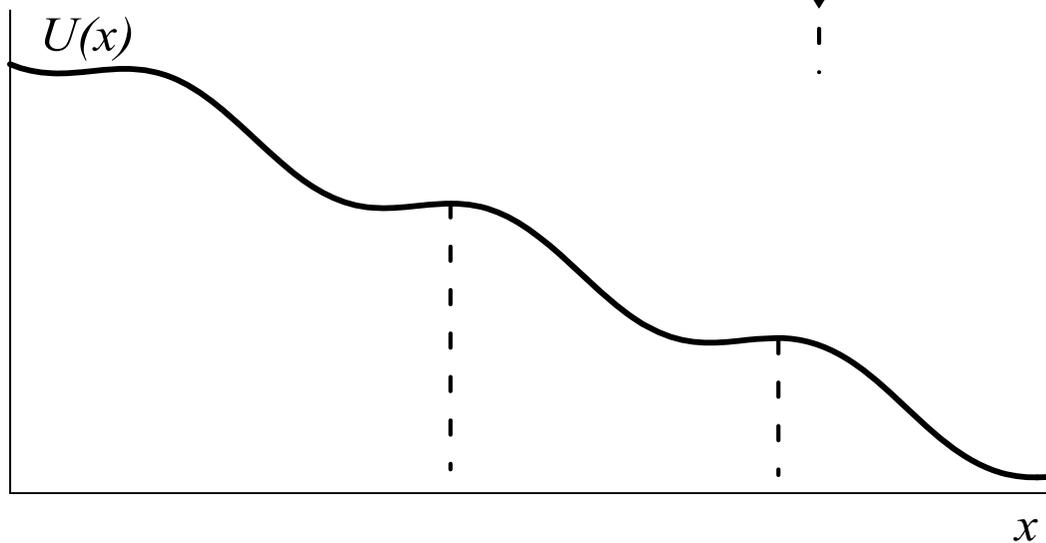
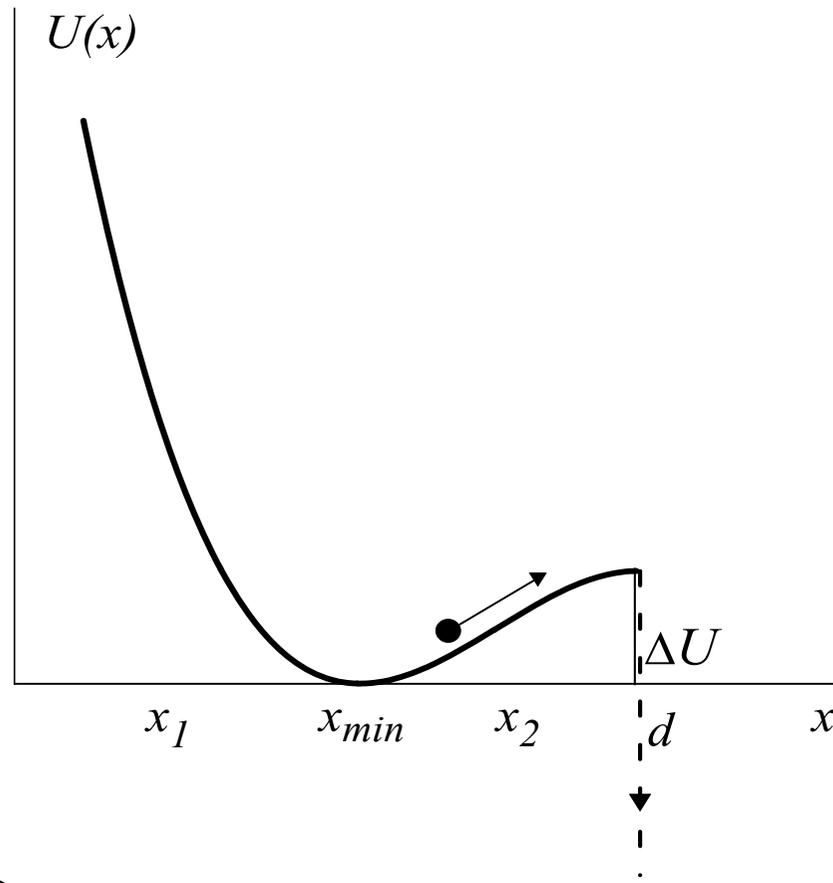
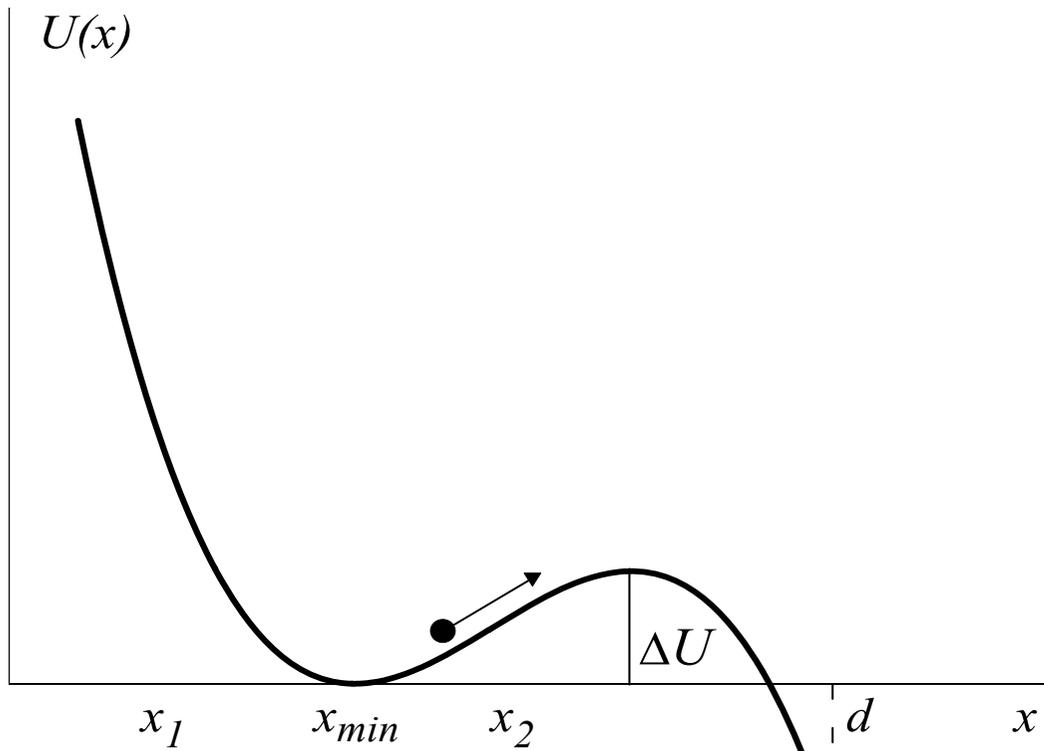
1. Моменты времени первого достижения границ (Понтрягин, Андронов, Витт, ЖЭТФ, 1933 г.)
2. Метод Крамерса:  $\theta \sim \exp(\Delta U/kT)$ , Physica, 1940 г.
3. Эффективное собственное число (Рискен, Юнг, Гаранин)
4. Обобщенное моментное разложение (Надлер, Шультен)
5. Интегральное время релаксации и цепные дроби (Коффей, Калмыков, Титов)

$$\theta = \frac{\int_0^{\infty} [P(t) - P(\infty)] dt}{P(0) - P(\infty)}$$

$$\langle t^n \rangle = \int_0^{\infty} t^n w(t) dt$$

$$P(t) = \int_c^d W(x, t) dx$$

вероятность нахождения  
в области  $(c, d)$



## Метод преобразования Лапласа

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{du(x)}{dx} Y(x, s) \right] - sBY(x, s) = -B\delta(x - x_0)$$

$$Y(x, s) = \int_0^{\infty} W(x, t) e^{-st} dt \qquad G(x, s) = \int_0^{\infty} G(x, t) e^{-st} dt$$

$$\theta = \frac{\int_0^{\infty} [P(t) - P(\infty)] dt}{P(0) - P(\infty)} \qquad \theta = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\hat{P}(s) - P(\infty)}{s[P(0) - P(\infty)]}$$

$$s\hat{P}(s) - P(\infty) = G(c, s) - G(d, s)$$

$$H(x, s) = sG(x, s) = H_0(x) + sH_1(x) + s^2H_2(x) + \dots$$

$$\tau_1(c, x_0, d) = -(H_2(d) - H_2(c));$$

$$\tau_2(c, x_0, d) = 2(H_3(d) - H_3(c));$$

$$\tau_n(c, x_0, d) = (-1)^n n! (H_{n+1}(d) - H_{n+1}(c)).$$

$$\tau_1 = B \left\{ \int_{x_0}^d e^{u(x)} \int_c^x e^{-u(y)} dy dx + \int_c^d e^{-u(y)} dy \cdot \int_d^\infty e^{u(x)} dx \right\}$$

$$\tau_2 = 2\tau_1^2 + F, \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{1-i^2}} \exp(\Delta u), \quad \Delta u \gg 1$$

A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, *Physica C* **269**, 46-54 (1996).

A.N. Malakhov, *Chaos* **7**, 488 (1997).

A.L. Pankratov, *Physics Letters A* **234**, 329-335 (1997).

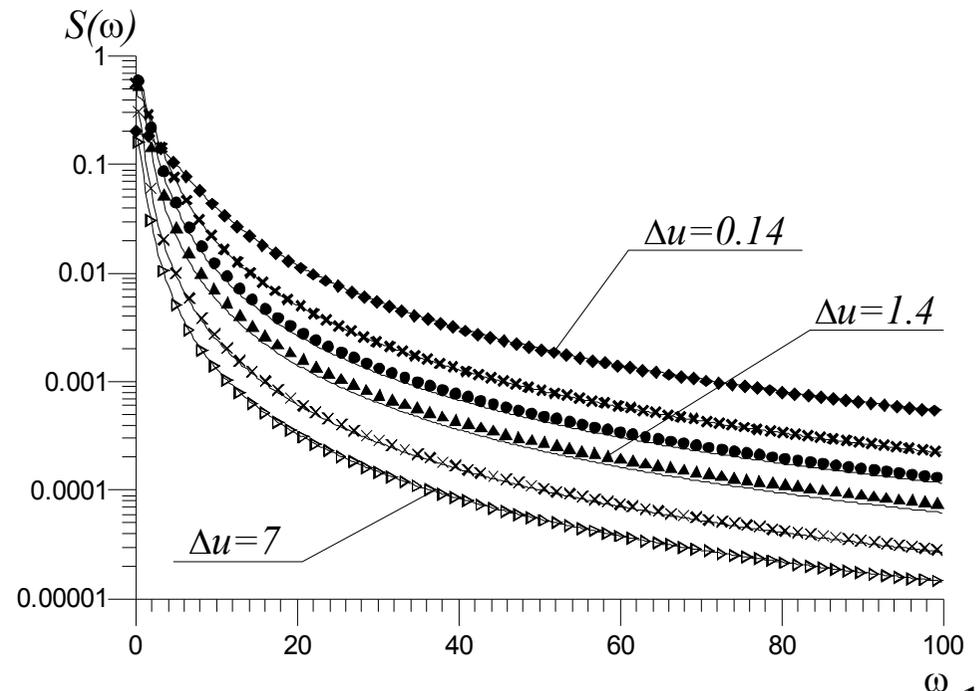
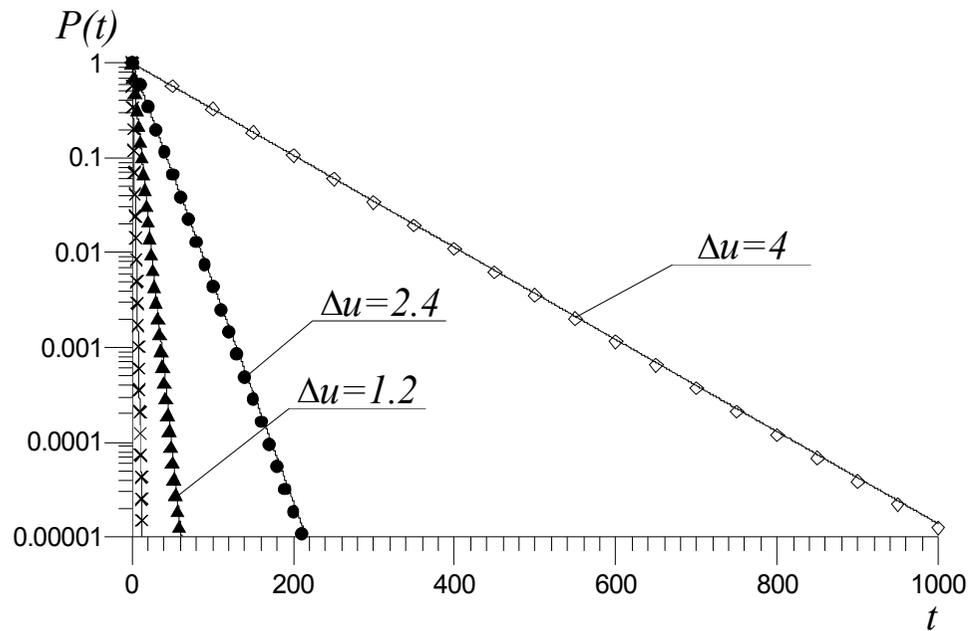
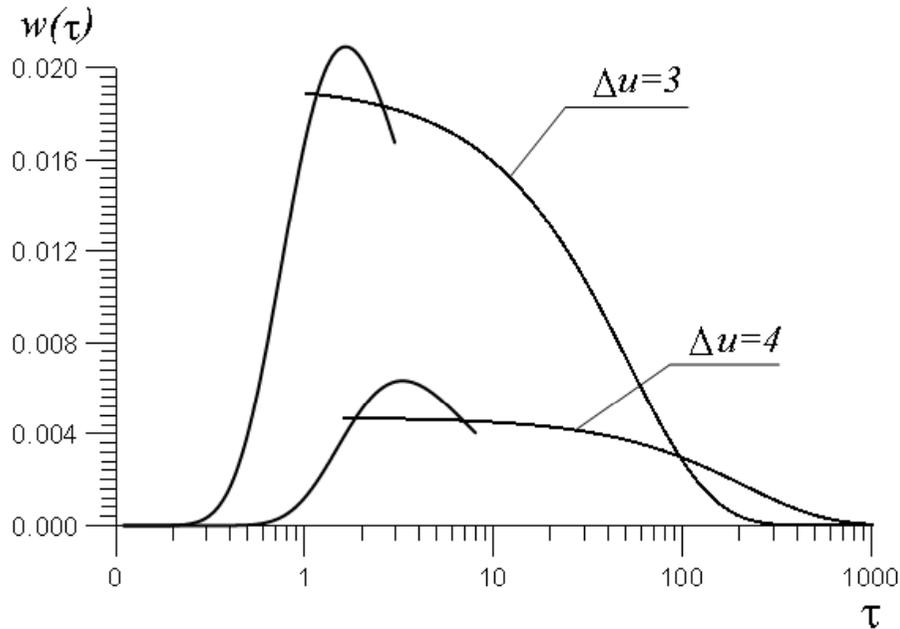
A.L. Pankratov, B. Spagnolo, *Physical Review Letters* **93**, 177001 (2004).

A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, *Adv. Chem. Phys.* **121**, 357-438 (2002).

# Временная эволюция средних

$$\tau_n \approx n! \tau_1^n$$

$$F(t) = F_0 \exp(-t / \tau)$$

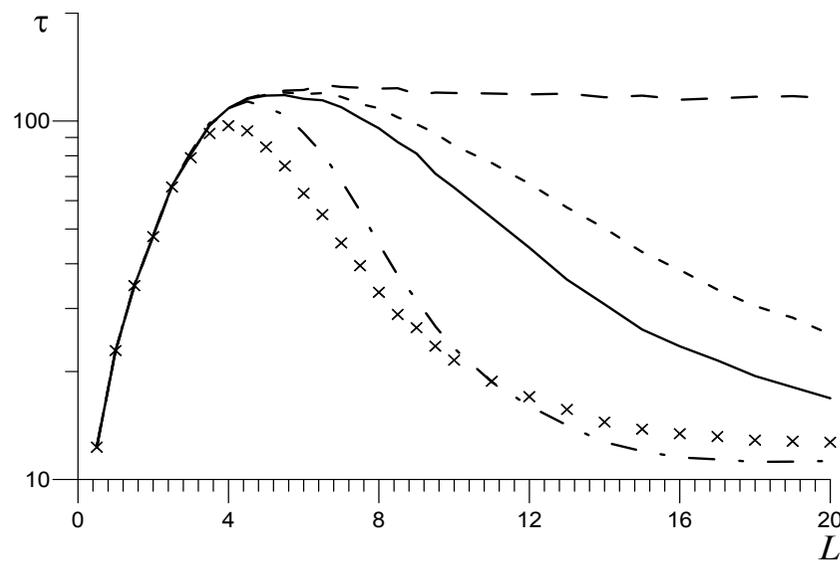
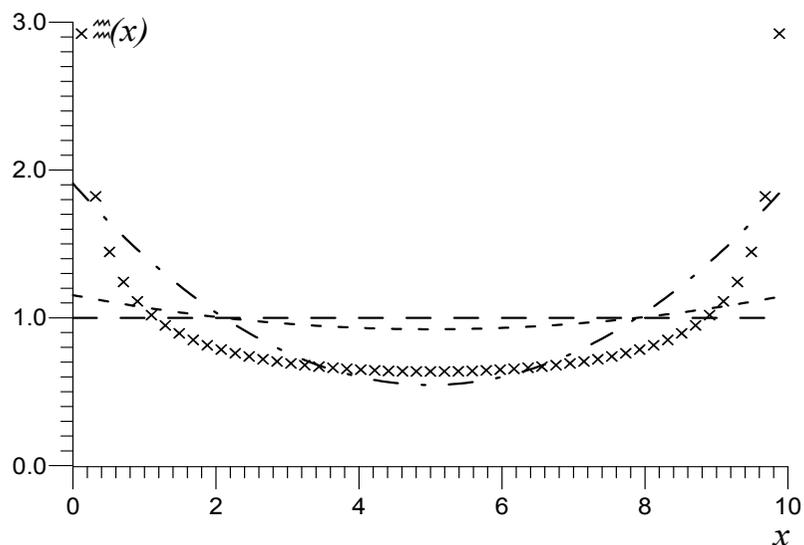
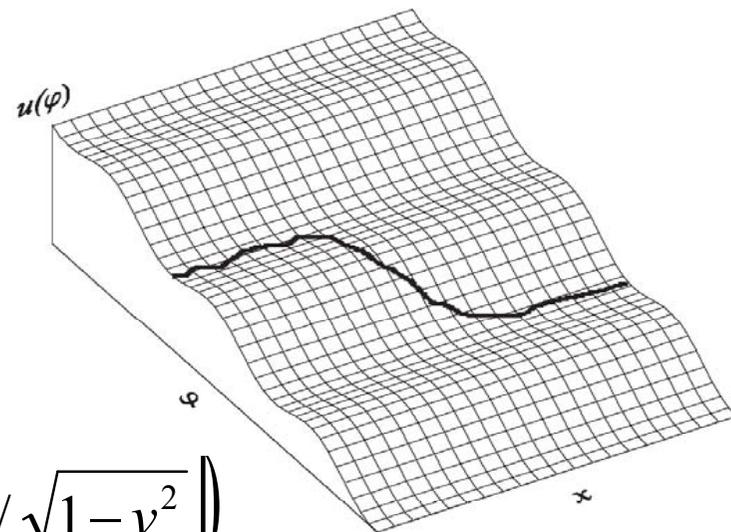


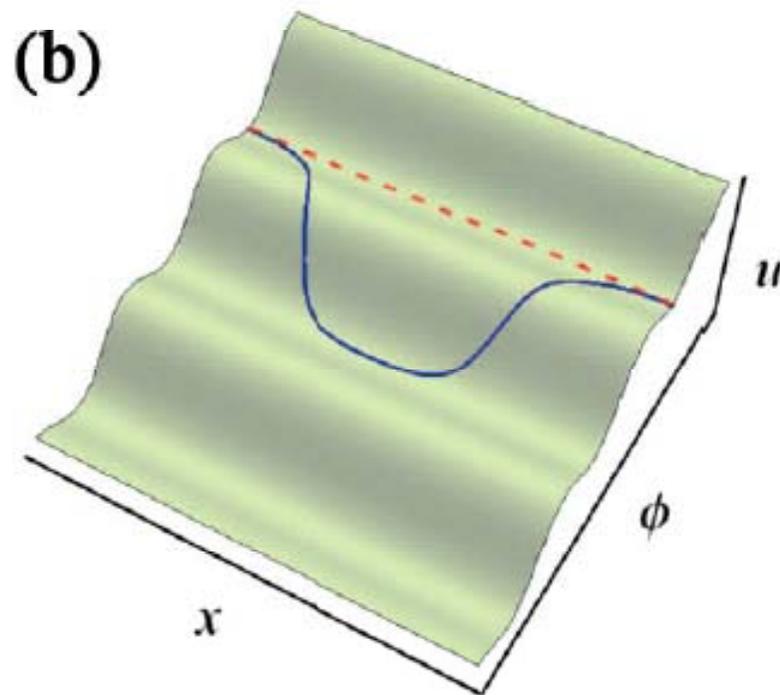
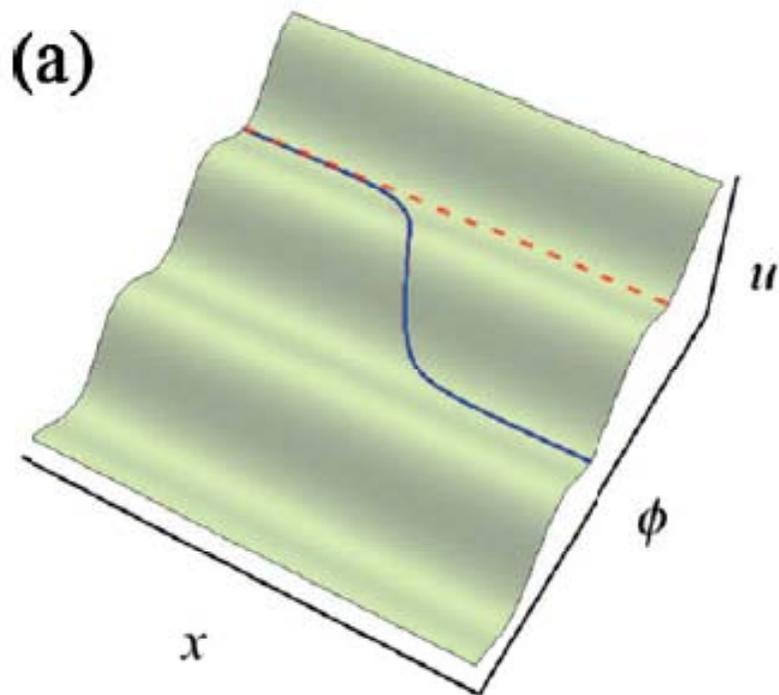
# Время жизни сверхпроводящего состояния

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \eta(x) - \sin(\varphi)$$

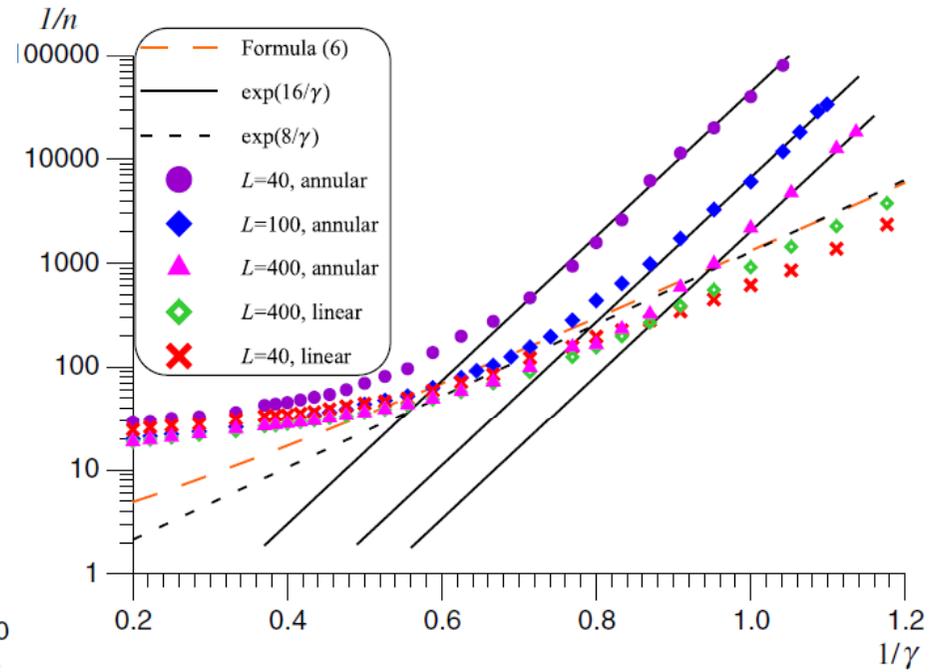
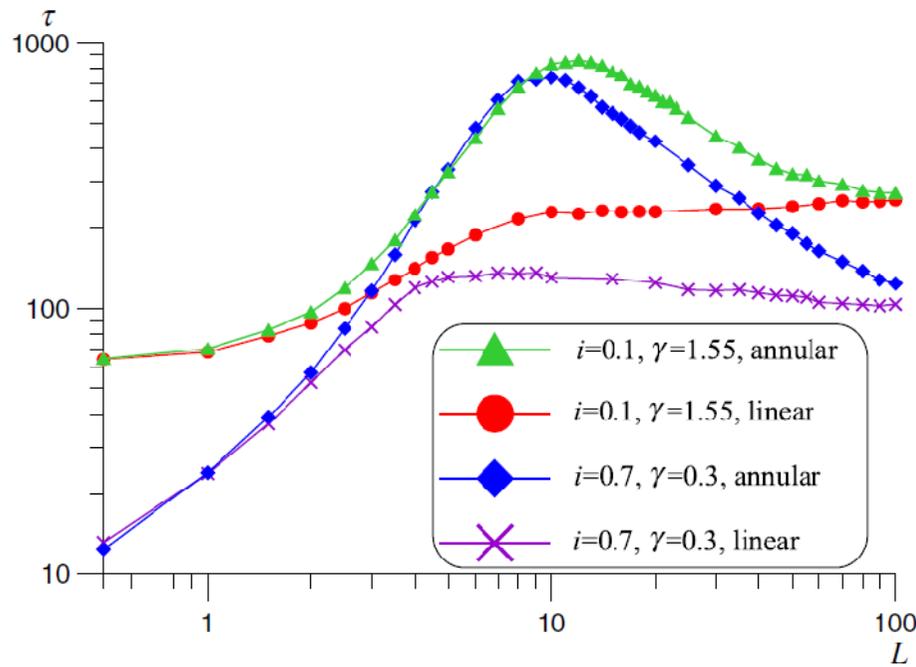
$$\frac{\partial \varphi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(L,t)}{\partial x} = H$$

$$\varphi(x,t) = \arctg \left( \exp \left[ (x - vt) / \sqrt{1 - v^2} \right] \right)$$





K.G. Fedorov, and A.L. Pankratov, Phys. Rev. Lett., 103, 260601 (2009).



$$n = \sqrt{2E_k / \pi \gamma} \exp(-E_k / \gamma), \quad (6)$$

M. Buttiker, and R. Landauer, Phys. Rev. A, 23, 1397 (1981).

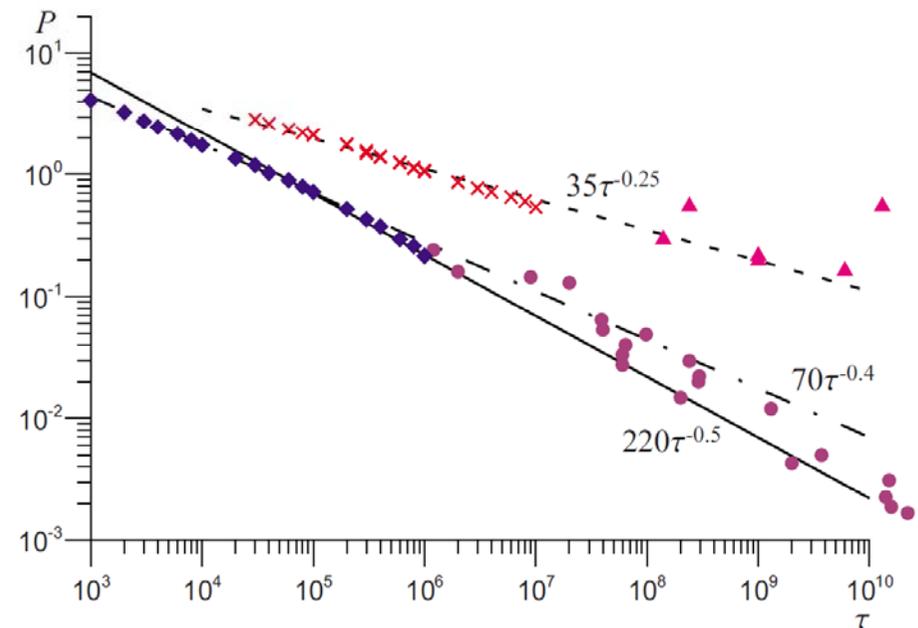
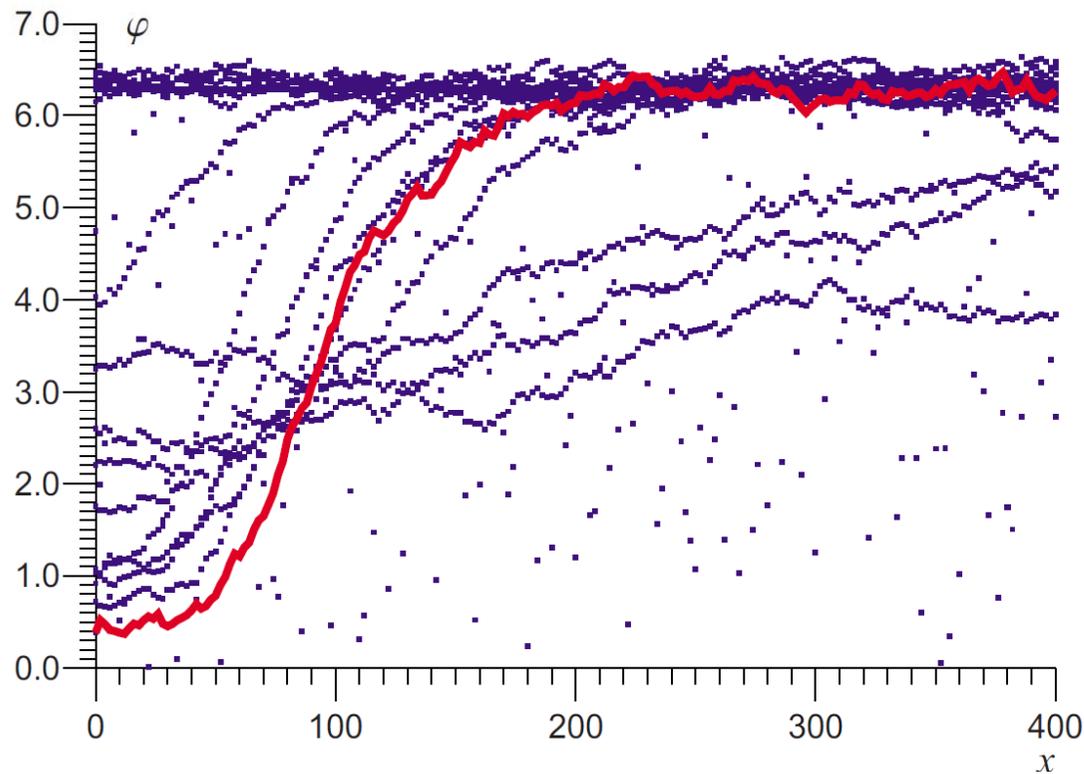
M. Buttiker, and T. Christen, Phys. Rev. Lett. 75, 1895 (1995).

# Механизм Киббла-Зурека образования вихрей

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \eta(x) - f(t) \sin(\varphi)$$

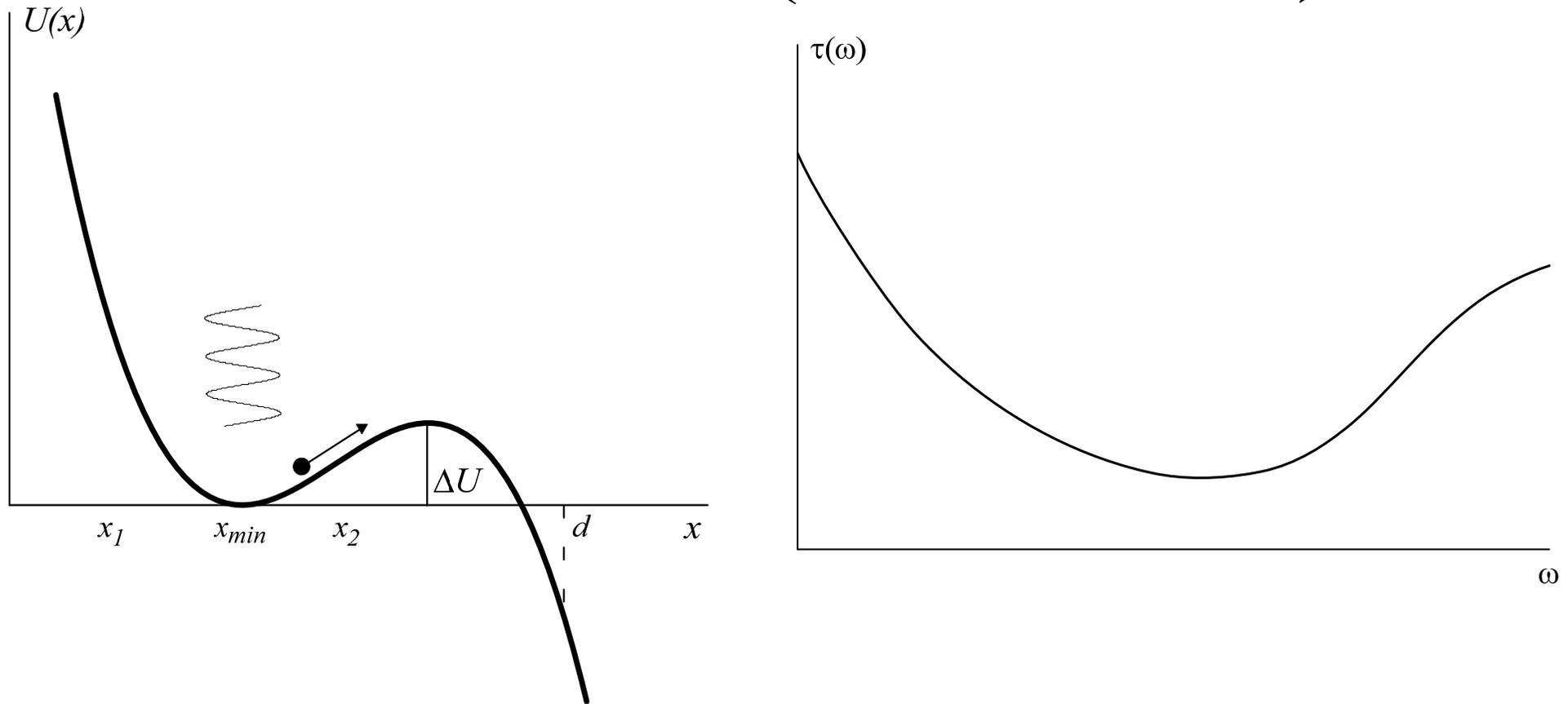
$$f(t) = [1 - T(t)/T_c],$$

$$f(t) = [1 - T(t)/T_c]^2.$$



# Резонансная активация

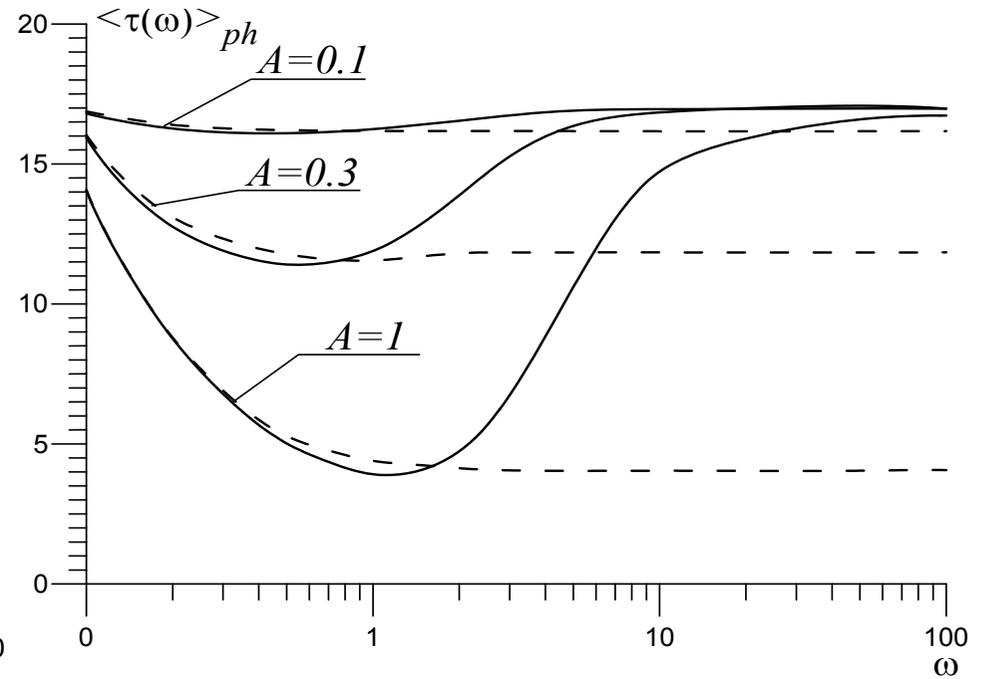
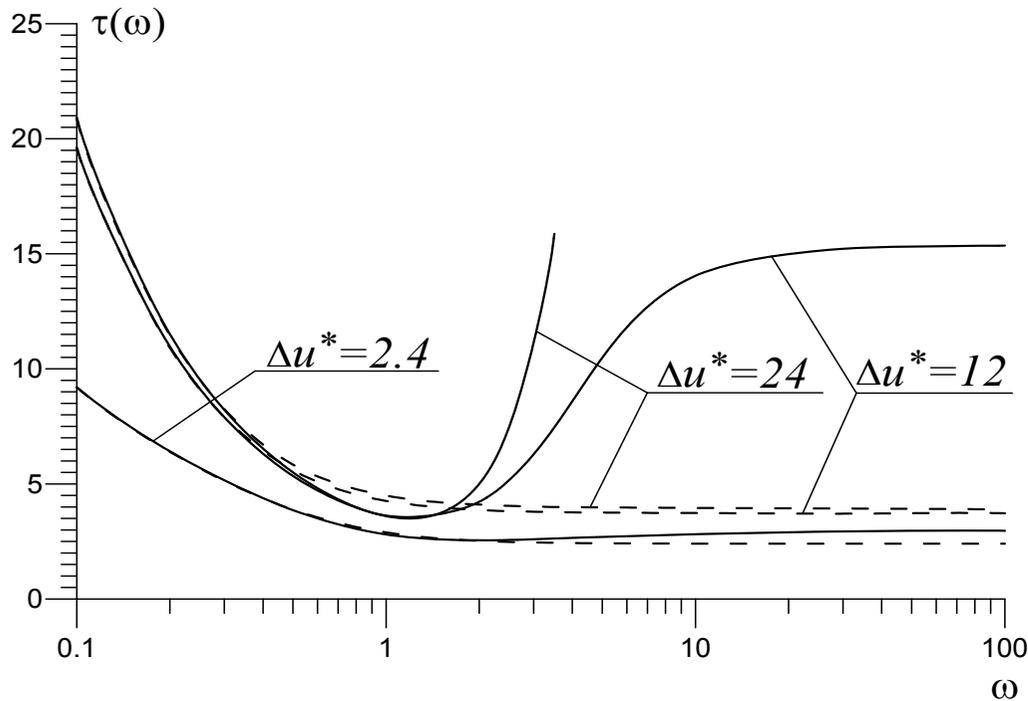
$$\frac{m}{h} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left( \frac{dU(x)}{dx} + A \sin(\omega t) \right) + \xi(t)$$



P. Jung, Physics Reports **234**, 175-295 (1993).

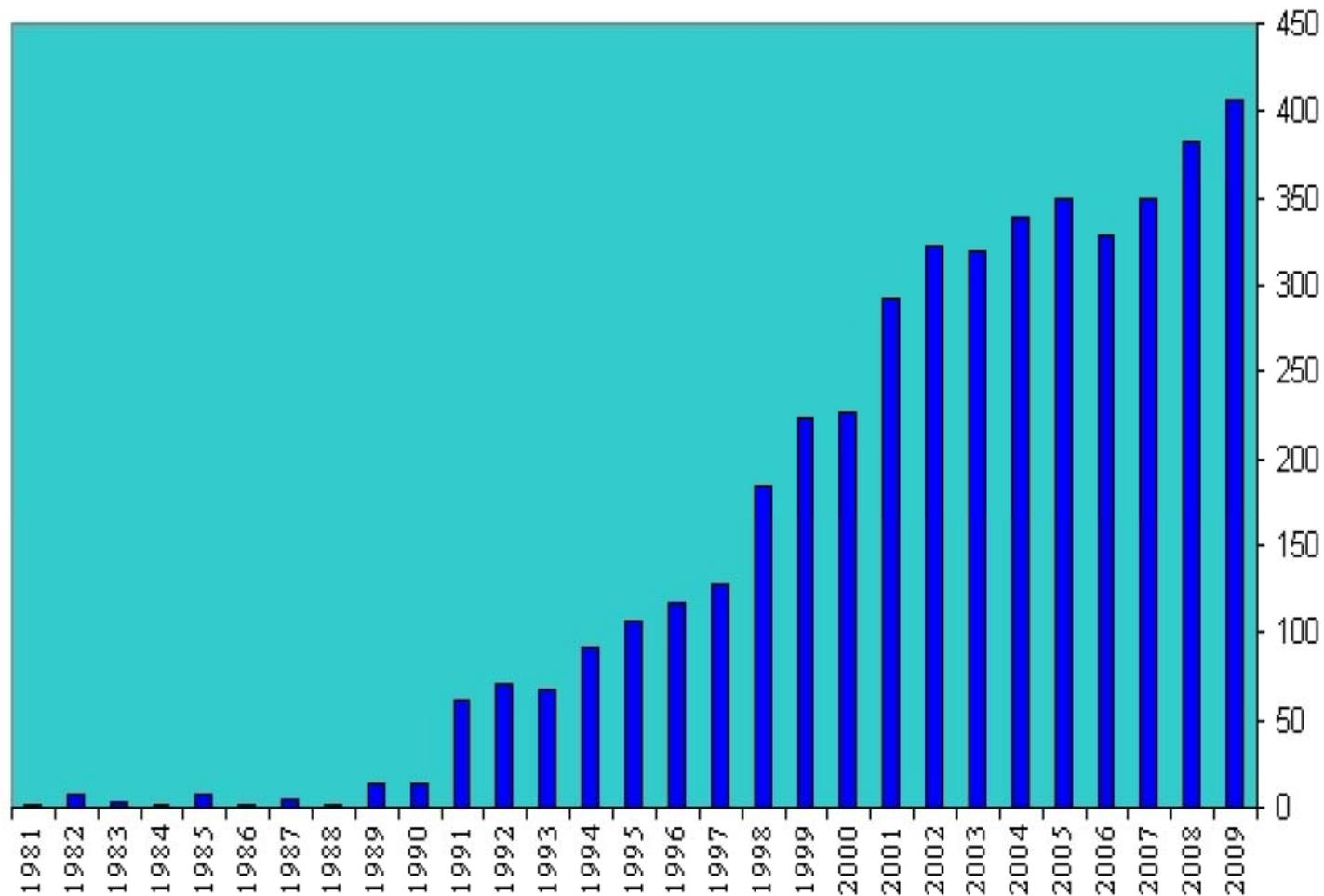
# Резонансная активация?

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left( \frac{dU(x)}{dx} + A \sin(\omega t) \right) + \xi(t)$$



A.L. Pankratov, M. Salerno, Physics Letters A **273**, 162-166 (2000).

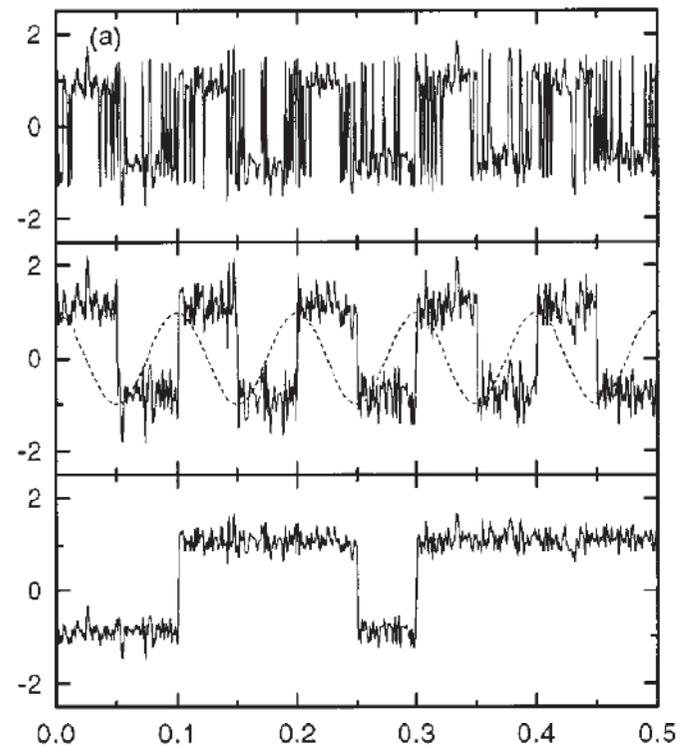
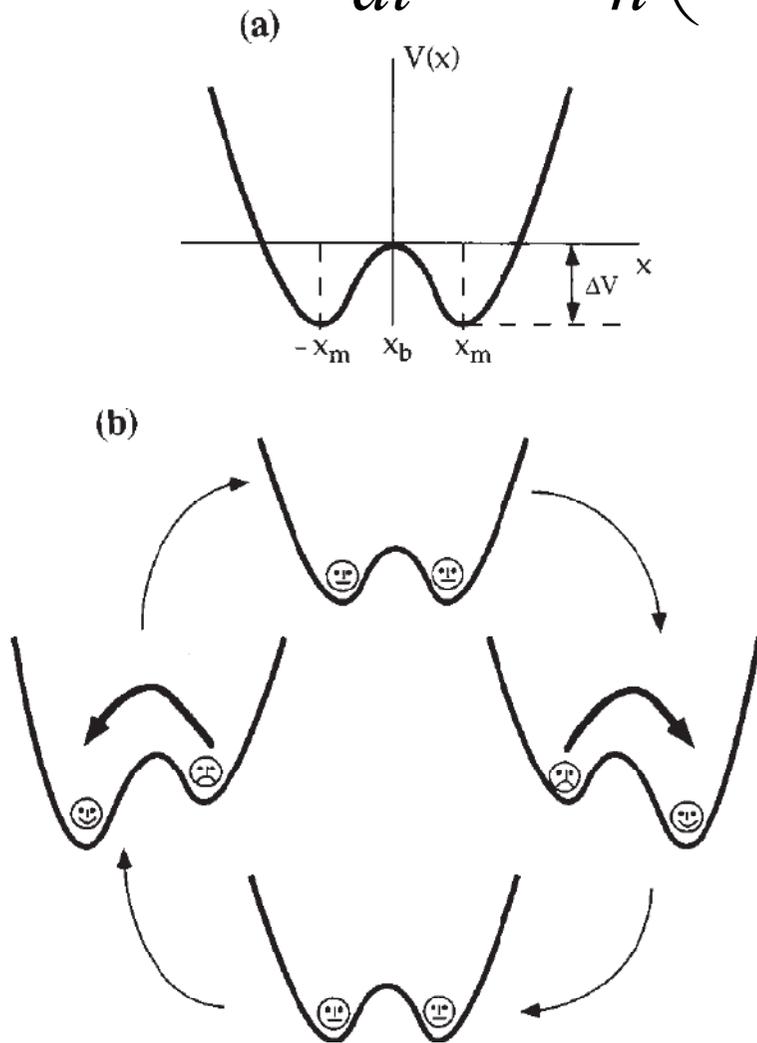
# Стохастический резонанс



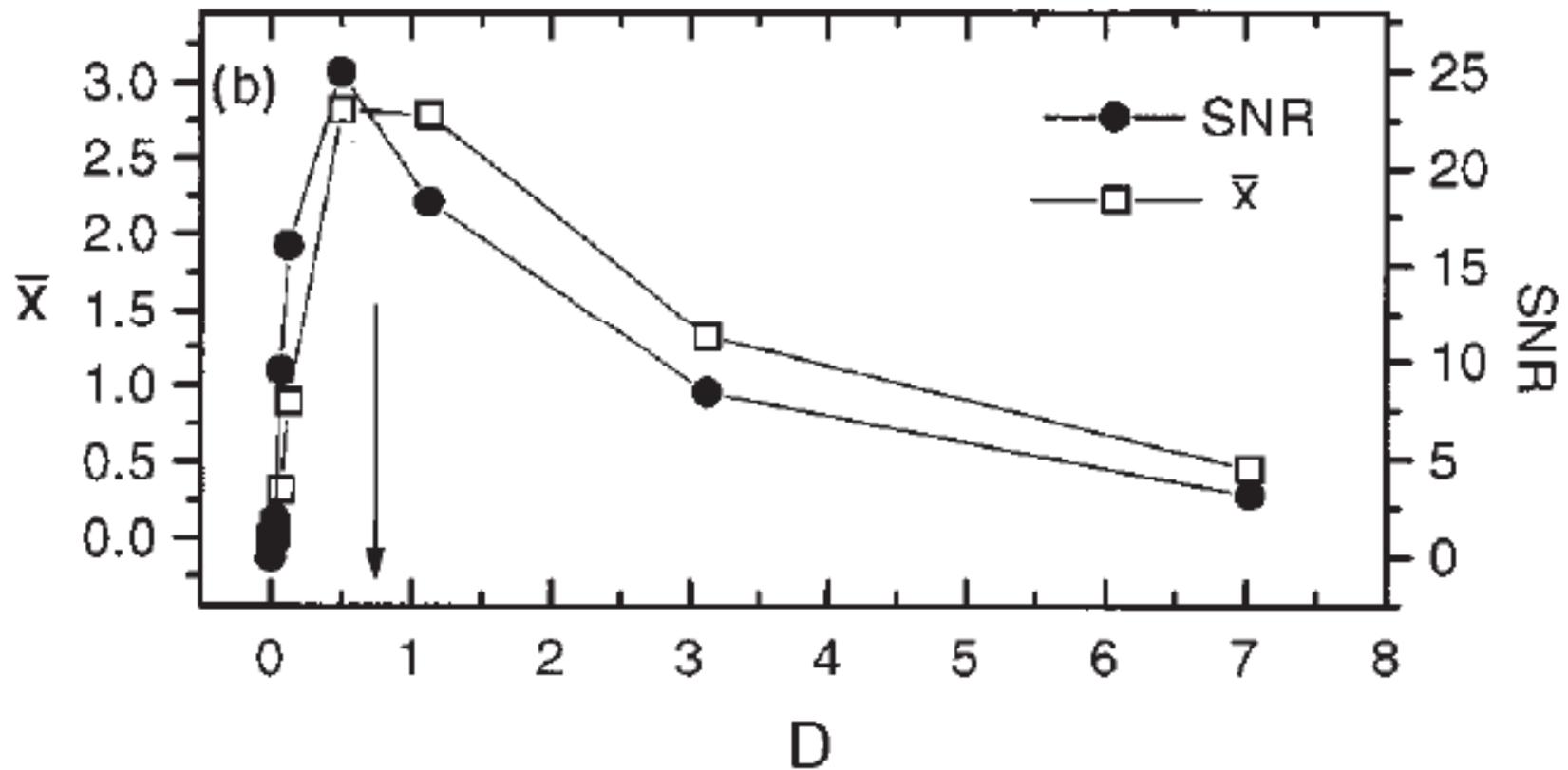
L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* 70, 223-287 (1998).  
В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *УФН*, 169, №1, 7 (1999).  
Th. Wellens, Y. Shatokhin and A. Buchleitner, *Rep. Progr. Phys.* 67, 45-105 (2004).

# Стохастический резонанс

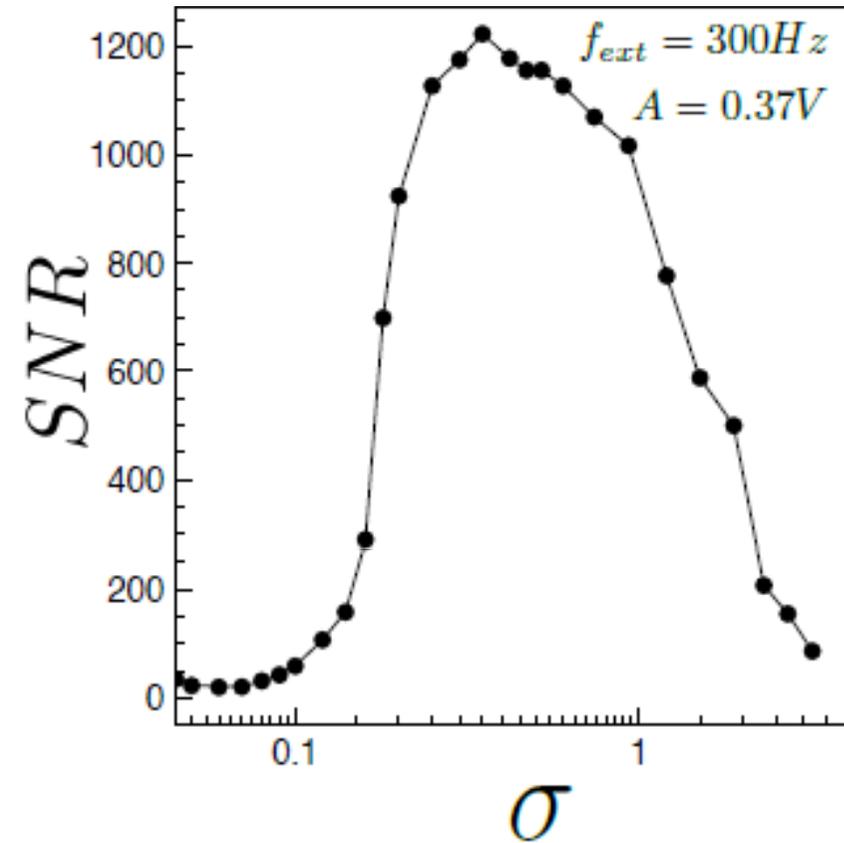
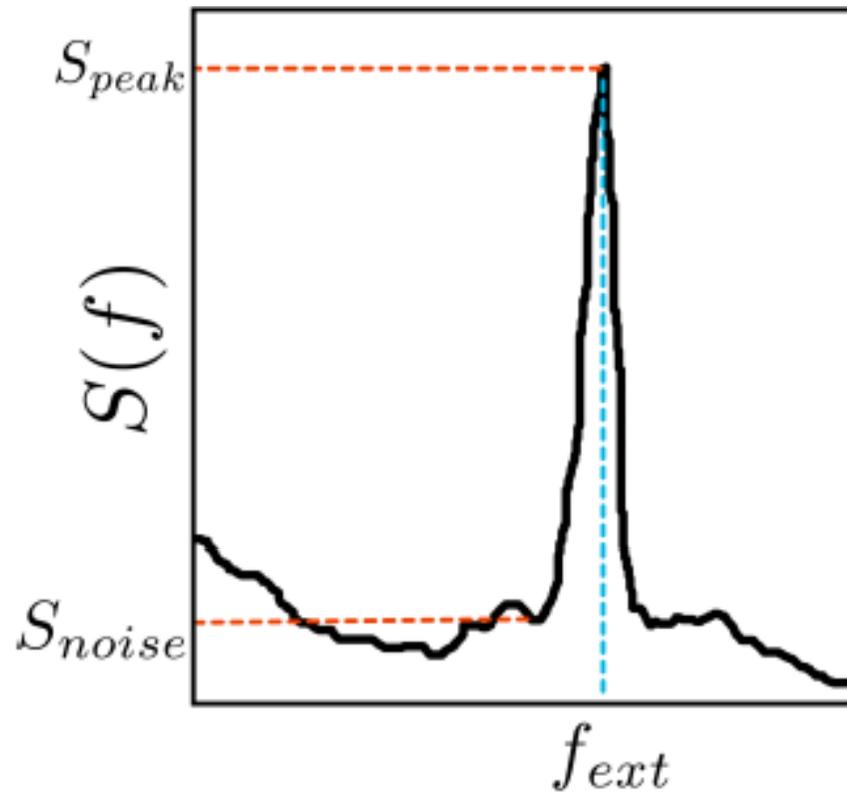
$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left( \frac{dU(x)}{dx} + A \sin(\omega t) \right) + \xi(t)$$

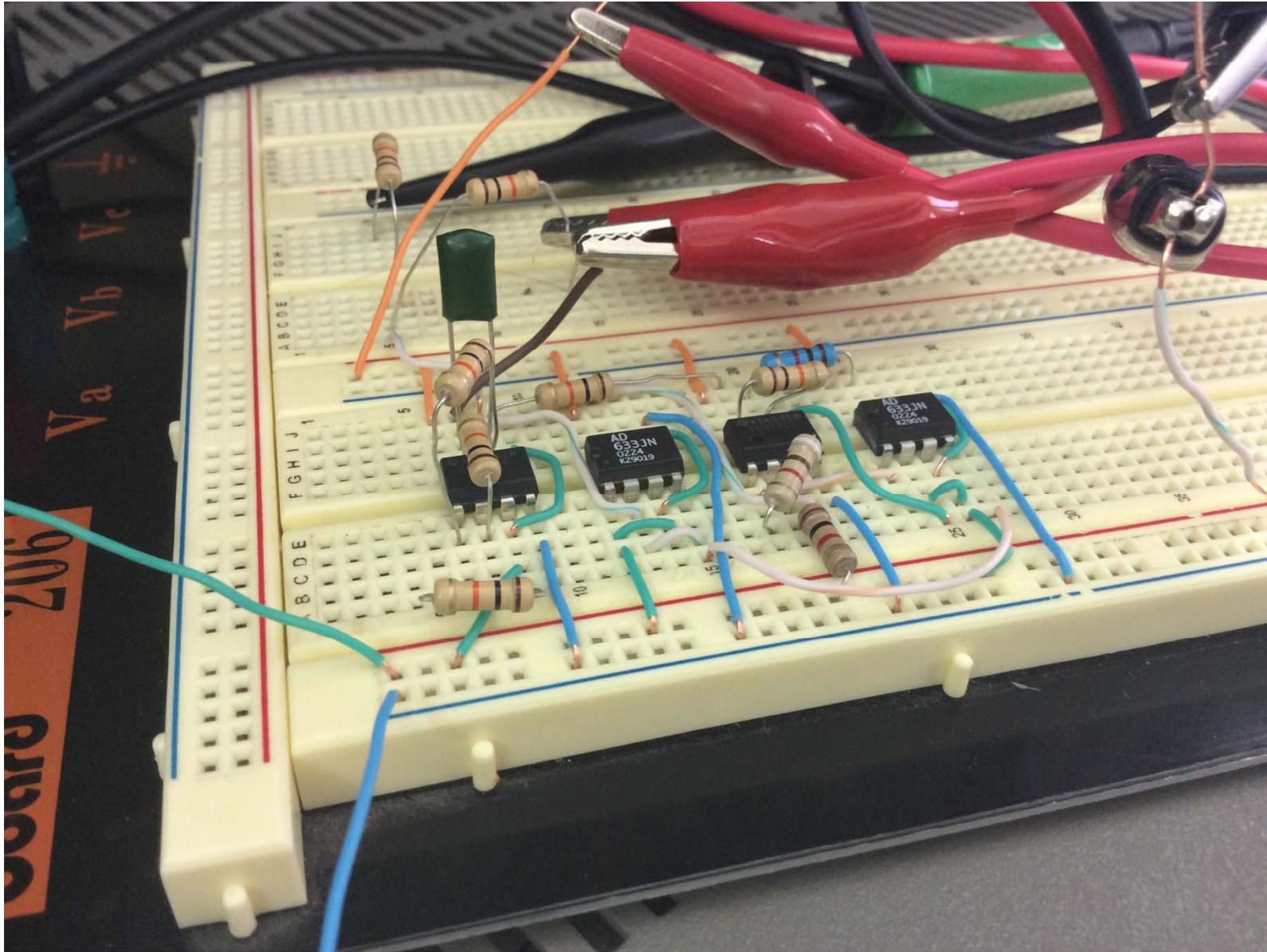


# Стохастический резонанс



# Стохастический резонанс

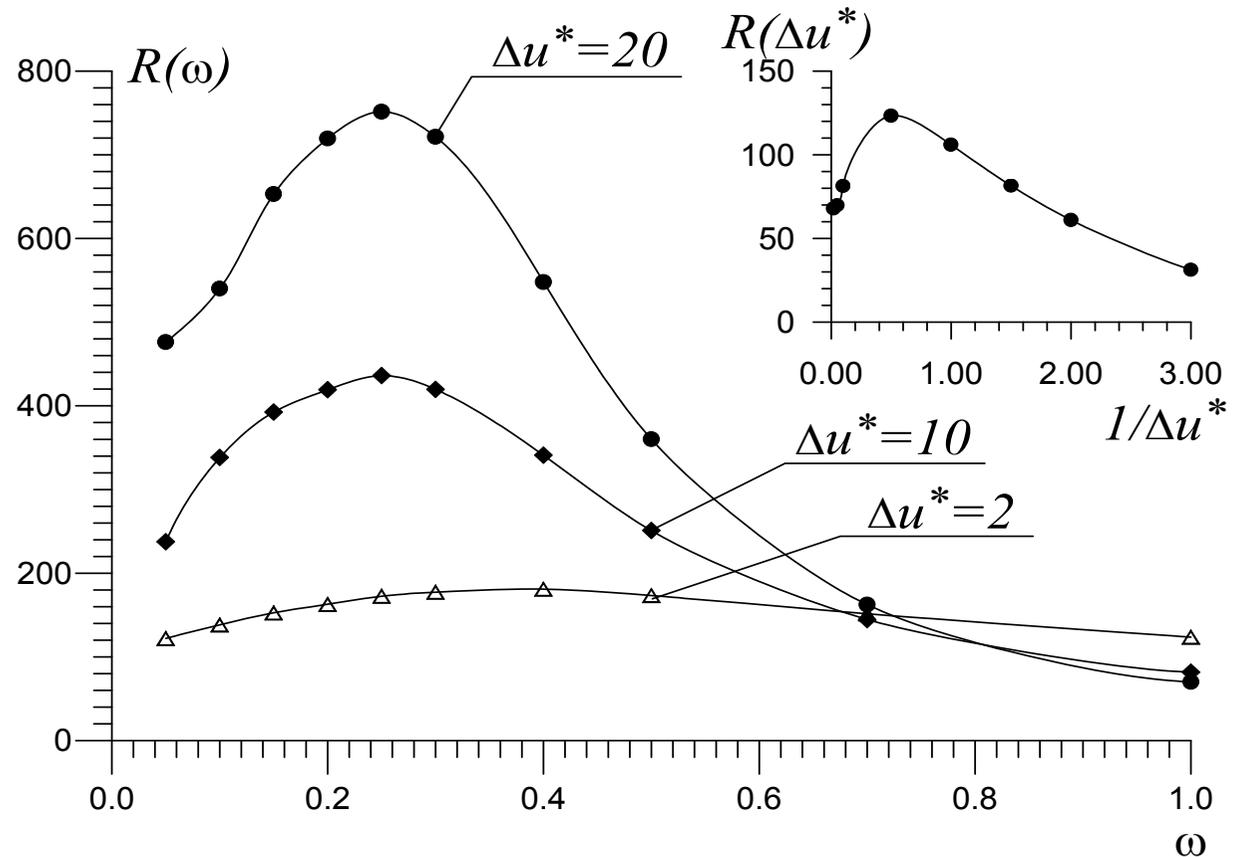




# Подавление шума сильным периодическим сигналом

$$\dot{x} = x - x^3 + A \sin(\omega t + \psi) + \xi(t)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{S_N(\omega)} \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \int_{\omega - \Delta\Omega}^{\omega + \Delta\Omega} S(\omega) d\omega$$



# Подавление ошибок переключения в устройствах БОК логики

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin(\varphi) - i(t) + i_F(t)$$

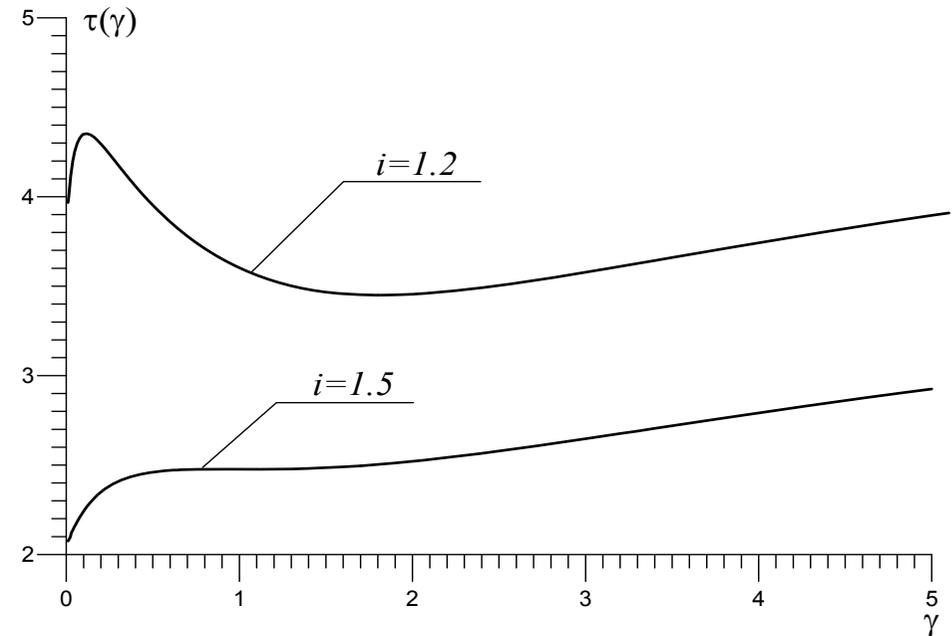
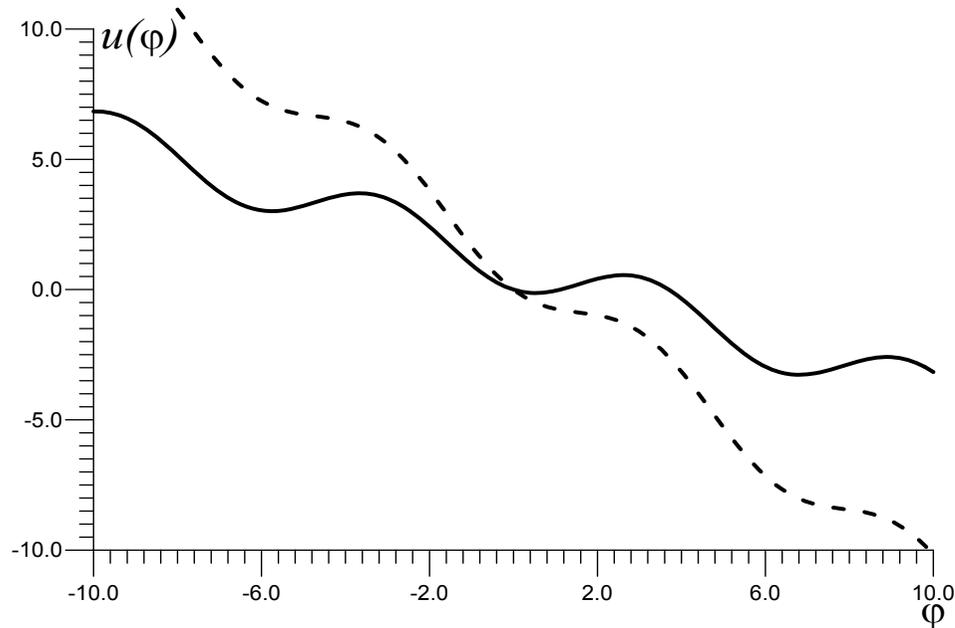
$$\tau = \langle t \rangle = \int_0^{\infty} tw(t)dt, \quad \sigma = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{i^2 - 1}} \arctan \left( \frac{i \tan(y/2) - 1}{\sqrt{i^2 - 1}} \right) \Big|_{y=x_0}^{y=d} + \right.$$

$$+ \gamma \left[ \frac{1}{2(i - \sin d)^2} + \frac{1}{2(i - \sin x_0)^2} \right] +$$

$$\left. + \gamma^2 \int_{x_0}^d \left[ \frac{3 \cos^2 y}{(i - \sin y)^5} - \frac{\sin y}{(i - \sin y)^4} \right] dy + \dots \right\}$$

# Задержка шумом распада неустойчивого состояния



Rylyakov A.V., Likharev K.K., **Pulse jitter and timing errors in RSFQ circuits**, IEEE Trans. Appl. Supercond. Vol. 9, 2. - P. 3539-3544 (1999).

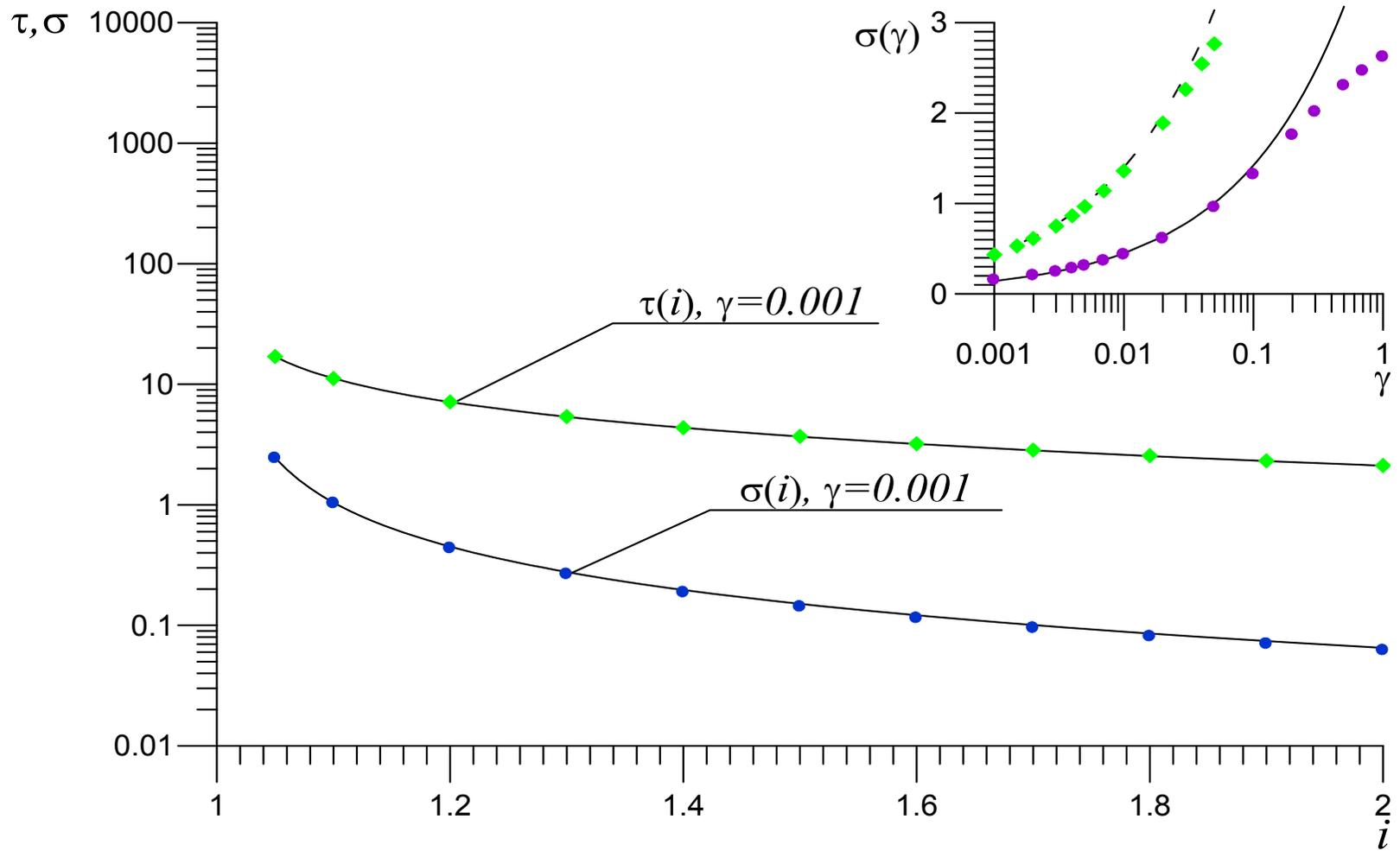
A.N. Malakhov, and A.L. Pankratov, Physica C, 269, 46 (1996).

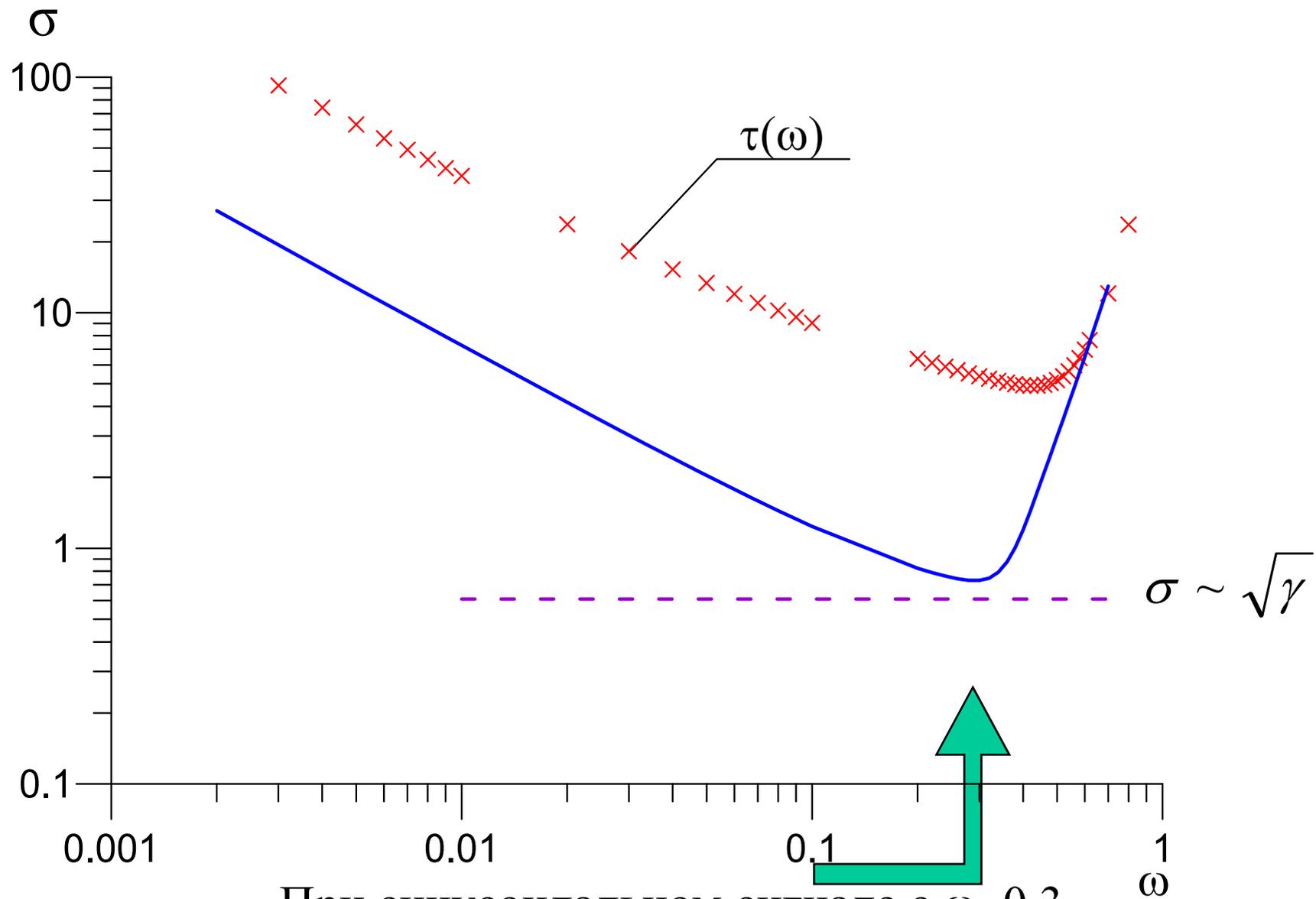
A.L. Pankratov and B. Spagnolo, Phys. Rev. Lett., 93, 177001 (2004).

V.K. Semenov and A. Inamdar, IEEE Trans. Appl. Supercond., 15, 435 (2005).

A.V. Gordeeva and A.L. Pankratov, Appl. Phys. Lett., 88, 022505 (2006).

$$\sigma = \frac{1}{\omega_C} \sqrt{2\gamma[F(\varphi_2, \varphi_0) + f_3(\varphi_2, \varphi_0)] + \dots}$$





При синусоидальном сигнале с  $\omega \sim 0.3$   
 практически достигается СО для  
 телеграфного сигнала

# Высокоскоростное переключение магнитных диполей

## Уравнение Ландау-Лифшица

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{(1+\alpha^2)} \left[ \vec{M} \times \vec{H}_{eff} \right] - \frac{\gamma\alpha}{(1+\alpha^2)M_s} \left[ \vec{M} \times \left[ \vec{M} \times \vec{H}_{eff} \right] \right]$$

$\gamma$  - гиромагнитная константа,  $\alpha$  - затухание

$M_s$  - намагниченность насыщения

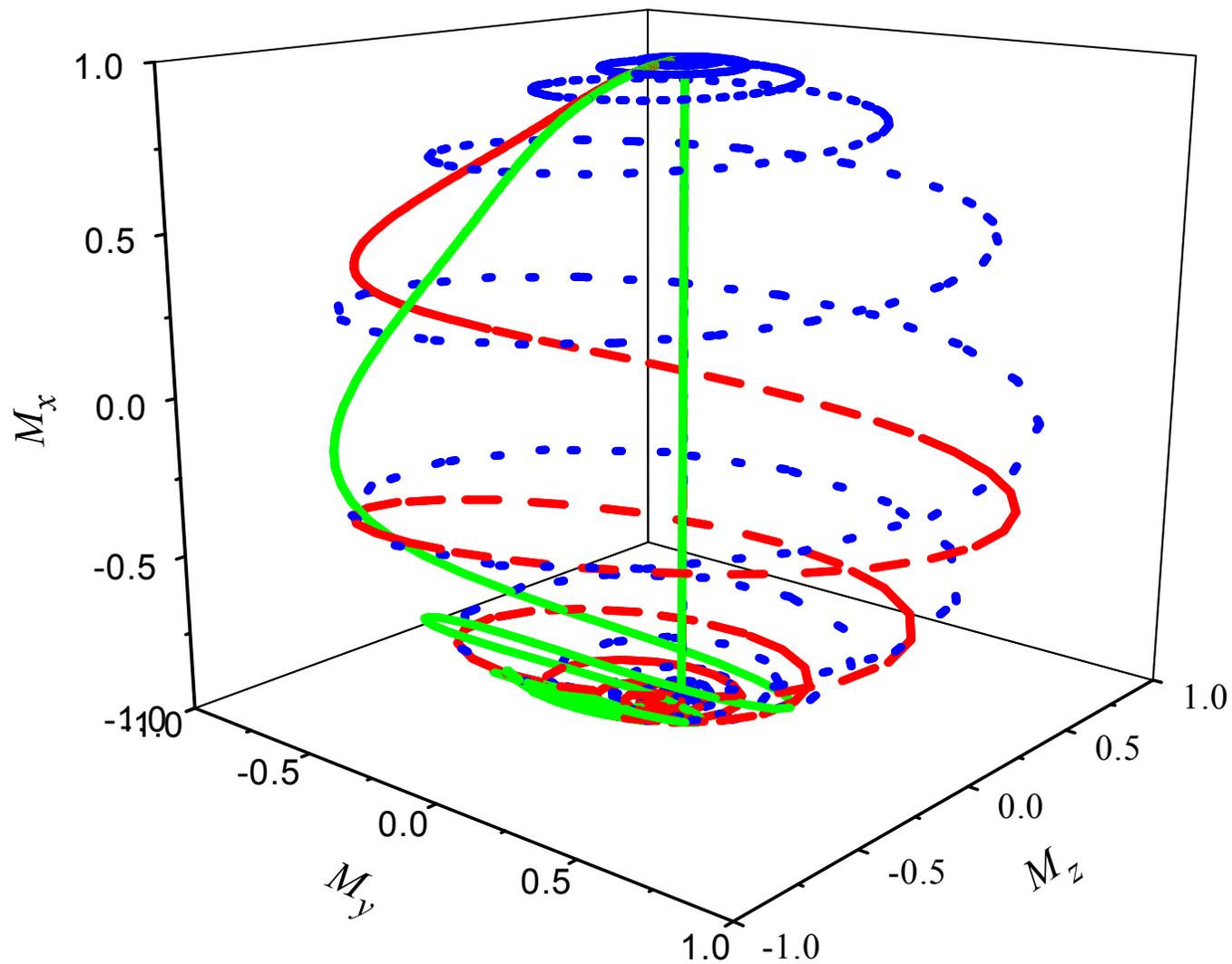
$$\overline{H}_{eff} = \overline{H}_a + \overline{H}_e + \overline{H}_T$$

$$\langle \vec{H}_T(t; \vec{r}) \rangle = 0 \quad \sigma^2 = \frac{2\alpha kT}{\gamma M_s V}$$

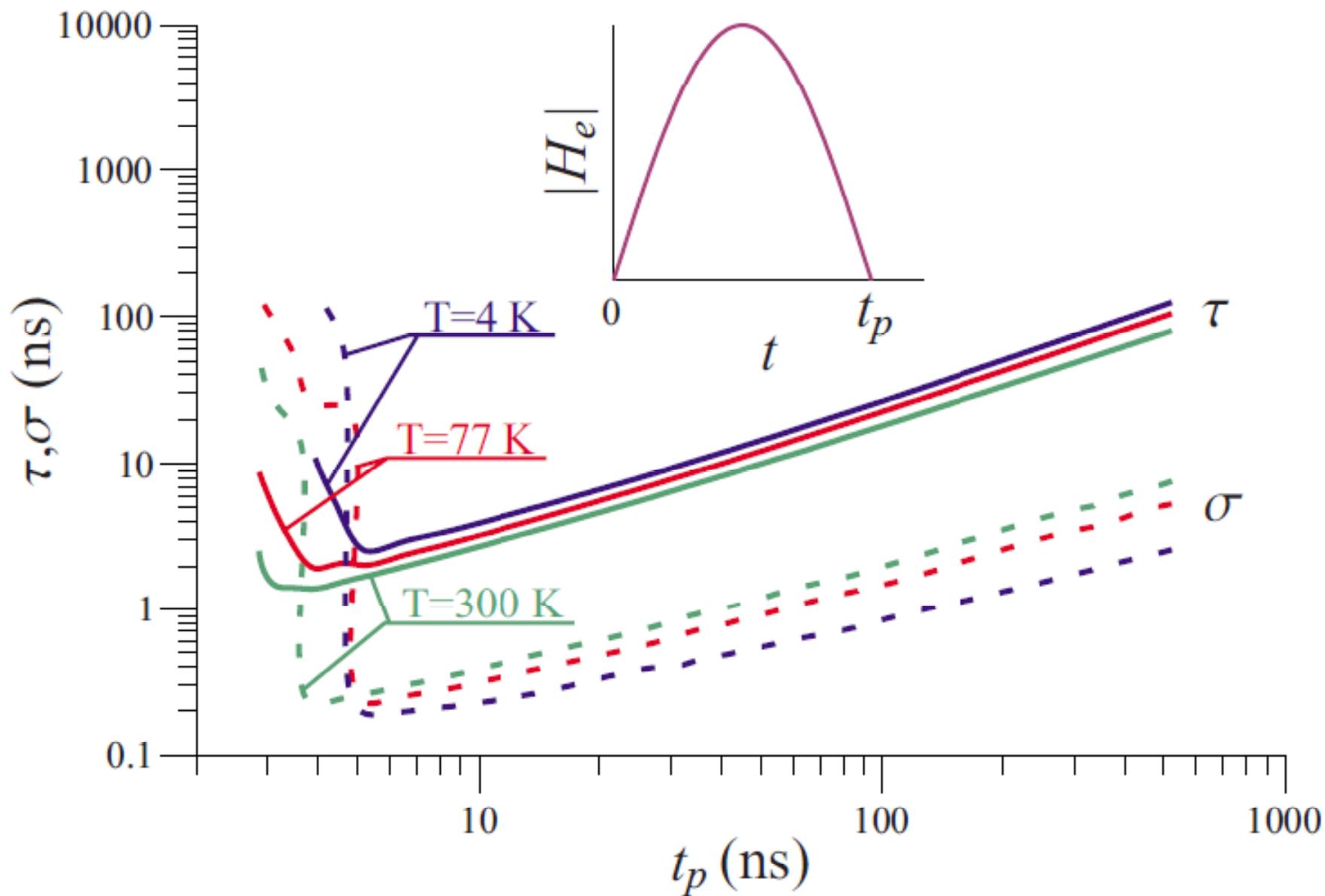
$$\langle H_i(t; \vec{r}), H_j(t'; \vec{r}') \rangle = \sigma^2 \delta(t-t') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{ij}$$

$$\vec{H}_a(\vec{r}) = \frac{2K_a}{M_s^2} \left( \vec{M}(\vec{r}), \vec{n}_a \right)$$

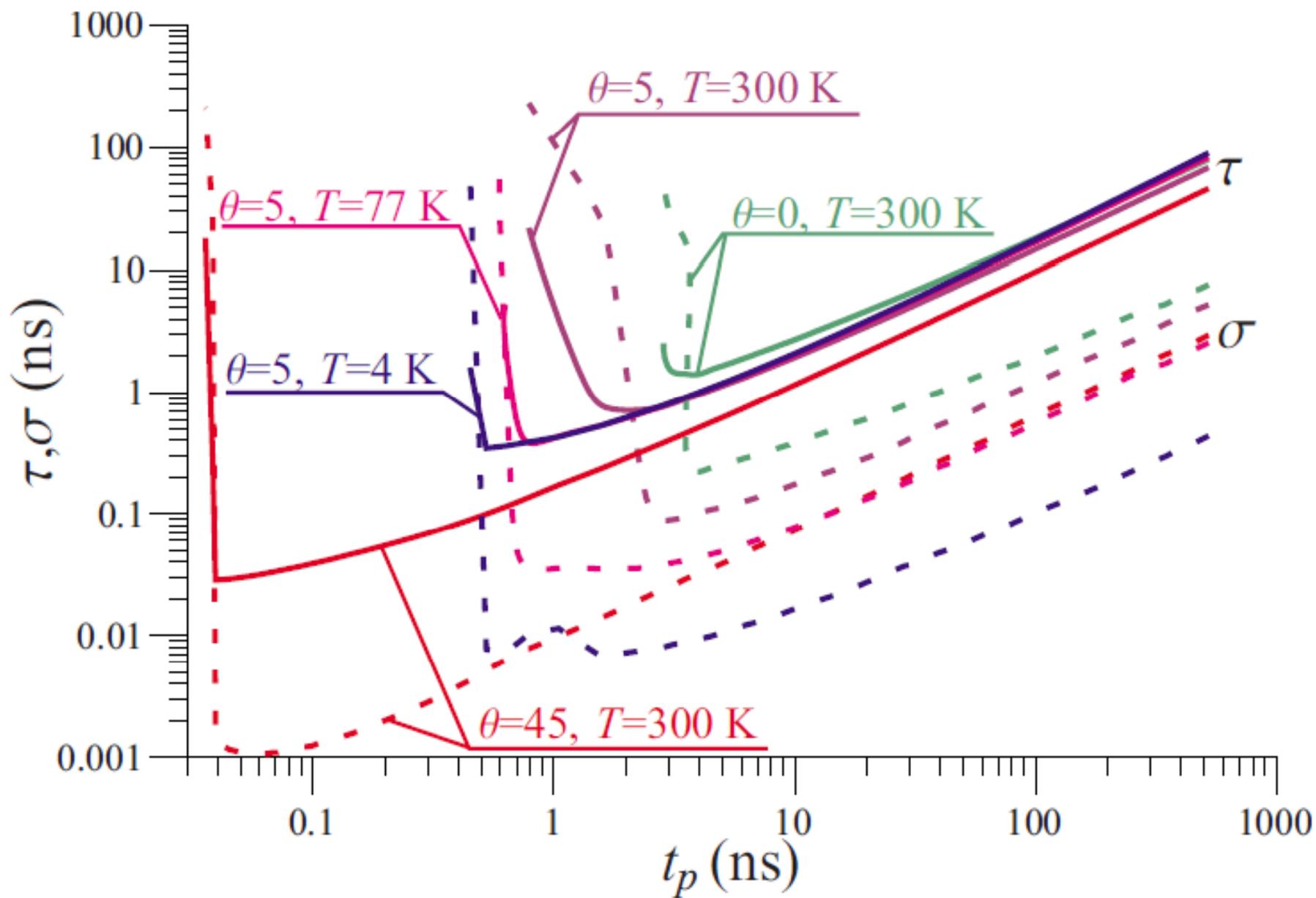
# Перемагничивание при различных углах



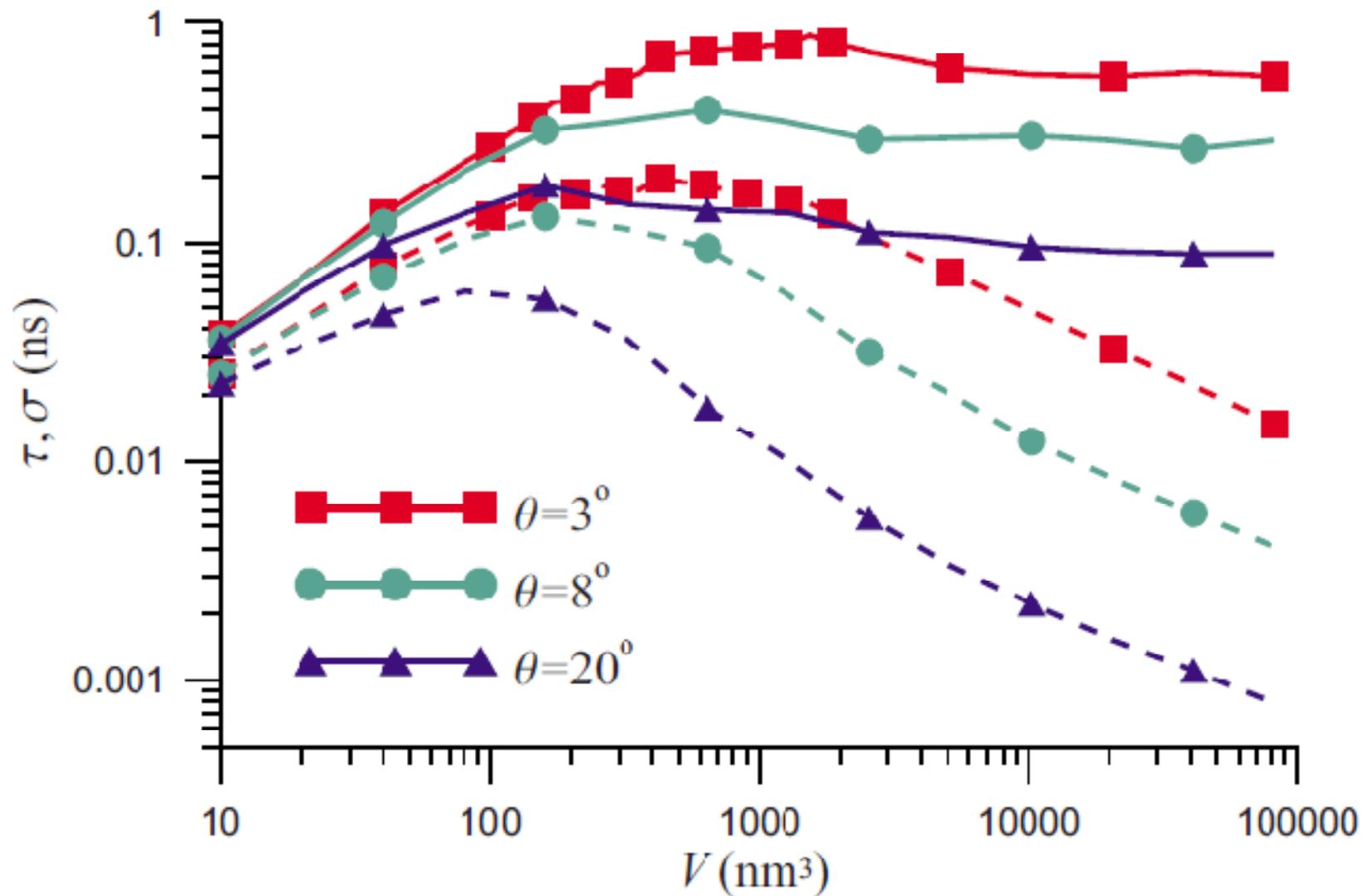
# Осевая симметрия

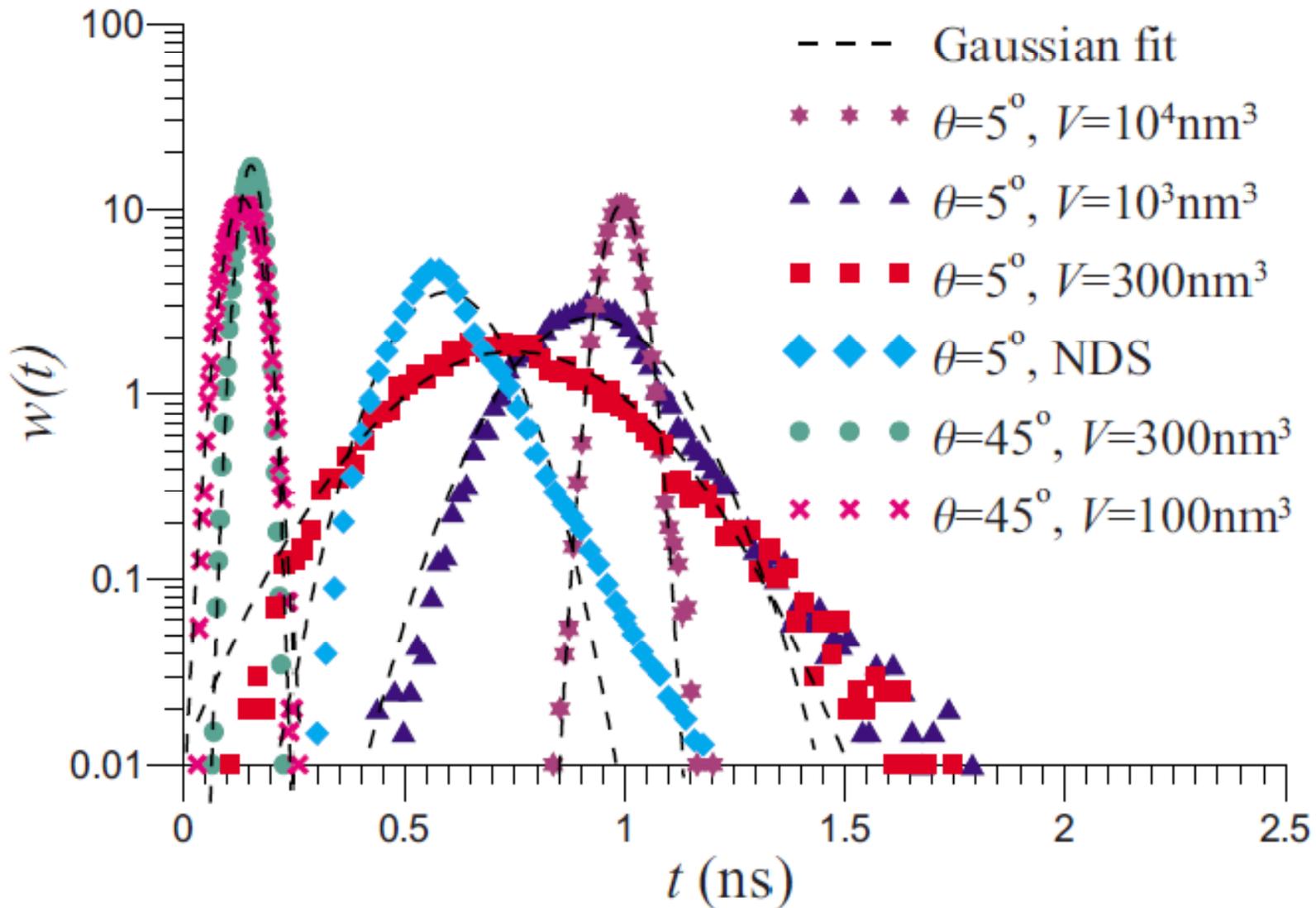


# Углы 0, 5, 45 градусов



## Зависимости от объёма частицы

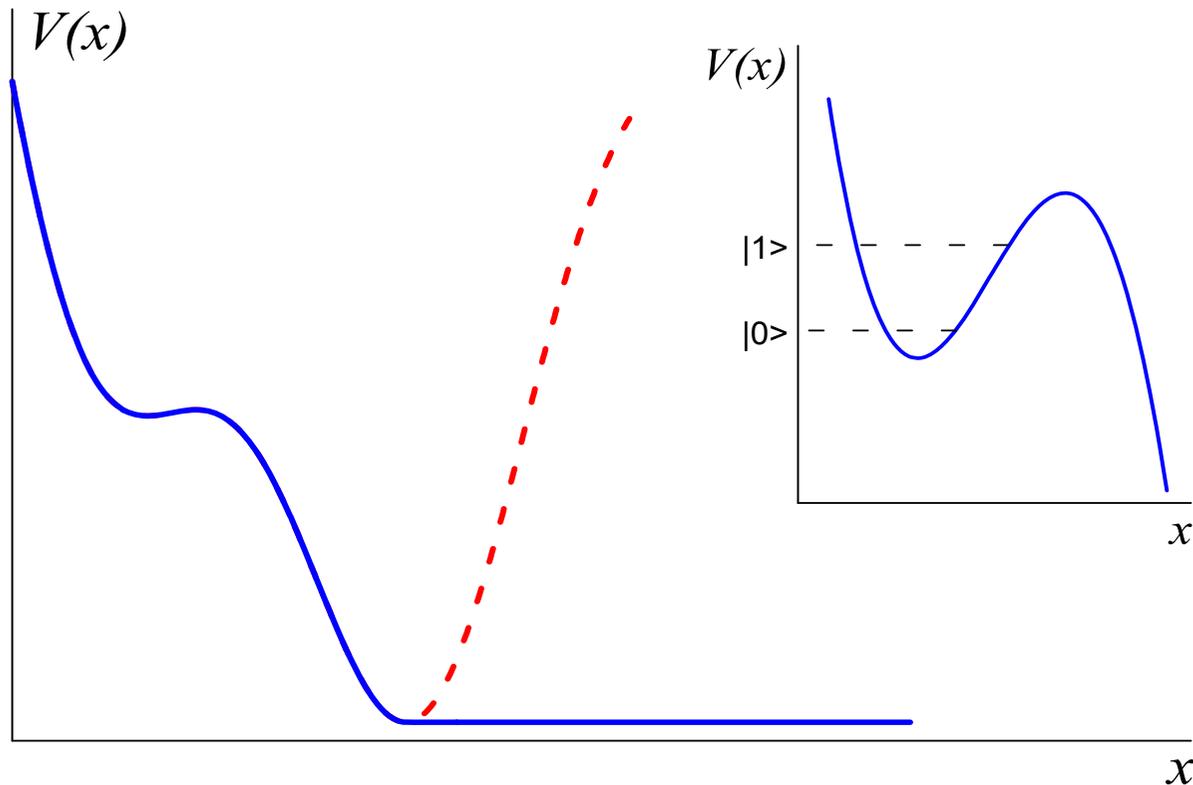




A.L. Pankratov, S.N. Vdovichev, I.M. Nefedov, Physical Review B, 78, 052401 (2008).  
 A.A. Smirnov, A.L. Pankratov, Physical Review B, 82, 132405 (2010).  
 A.L. Pankratov, S.N. Vdovichev, I.M. Nefedov, I.R. Karetnikova, Journal of Applied Physics, 109, 033906 (2011).

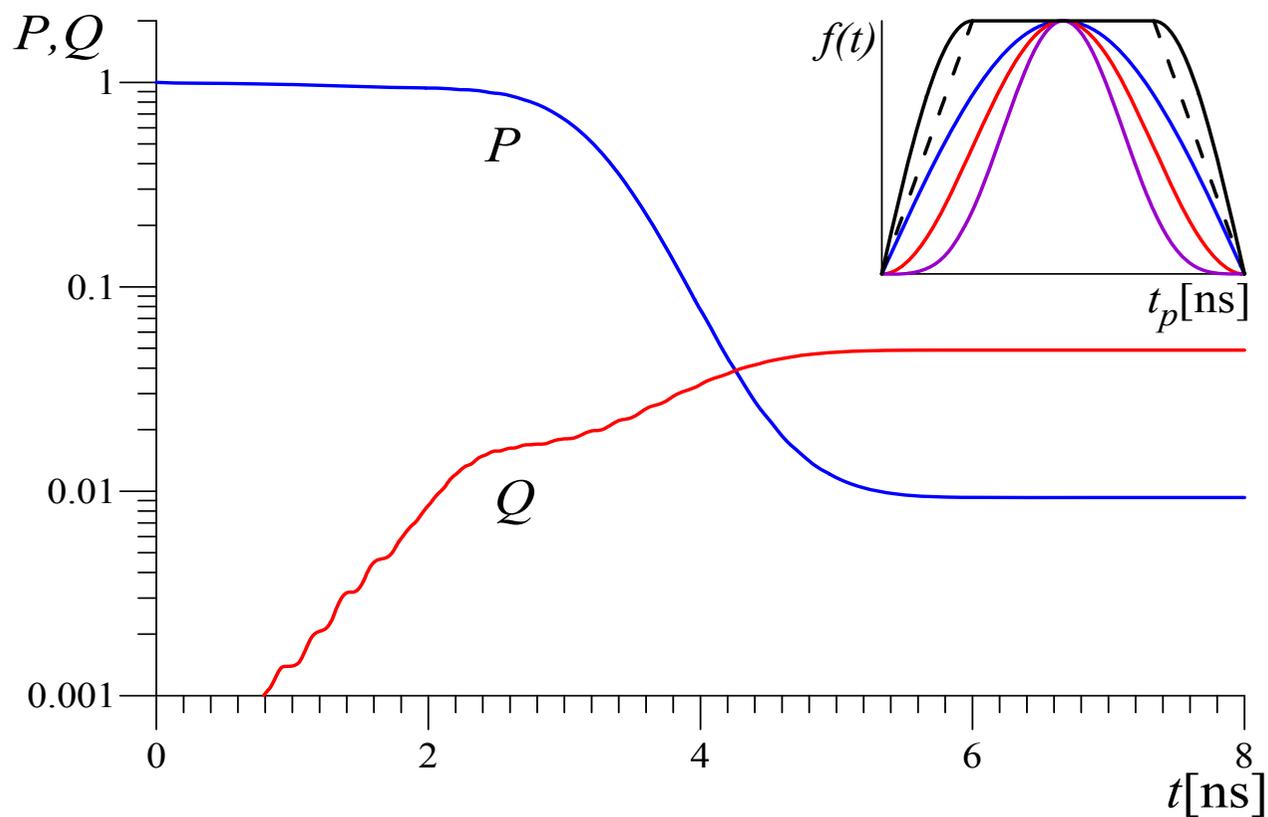
# Оптимальное быстрое считывание состояния кубита

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = - \frac{2e^2}{\hbar C} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{V(x, t)}{\hbar} \Psi(x, t)$$



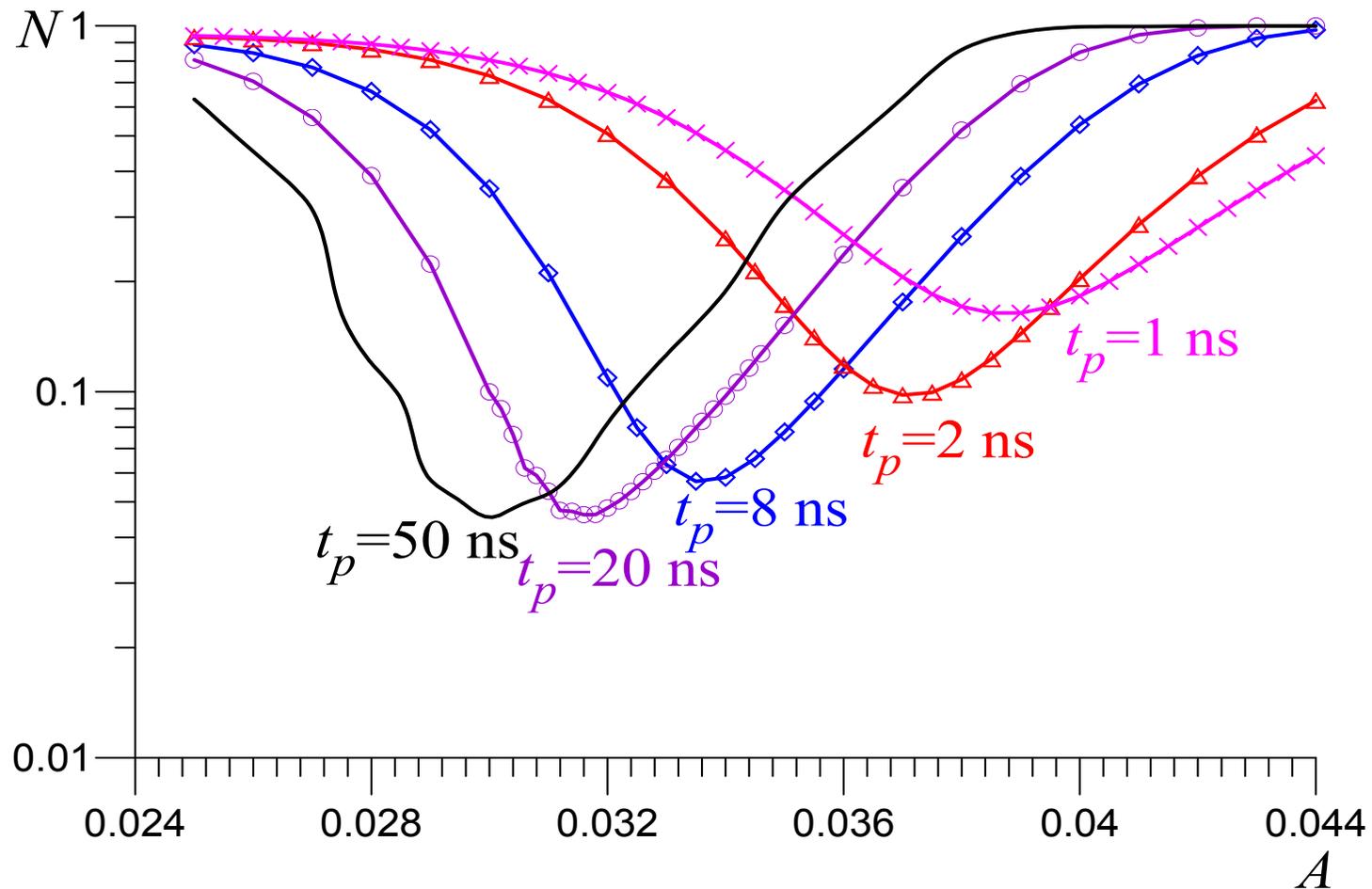
# Эволюция вероятности

$$N = P(t_p) + Q(t_p) = P_{10} + P_{01}, \quad F = 1 - N$$

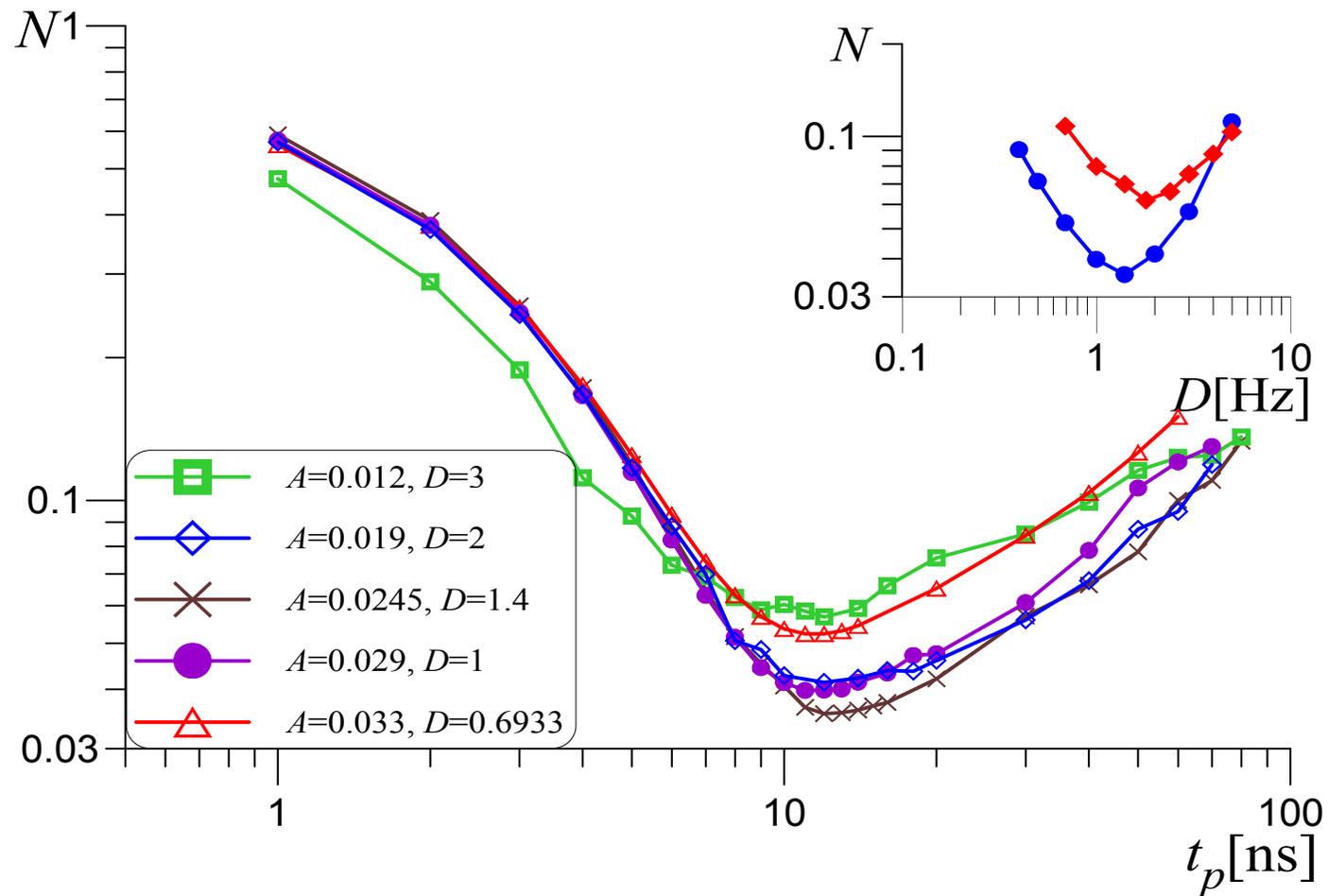


Q. Zhang, A. G. Kofman, J. M. Martinis, and A. N. Korotkov,  
Phys. Rev. B **74**, 214518 (2006).

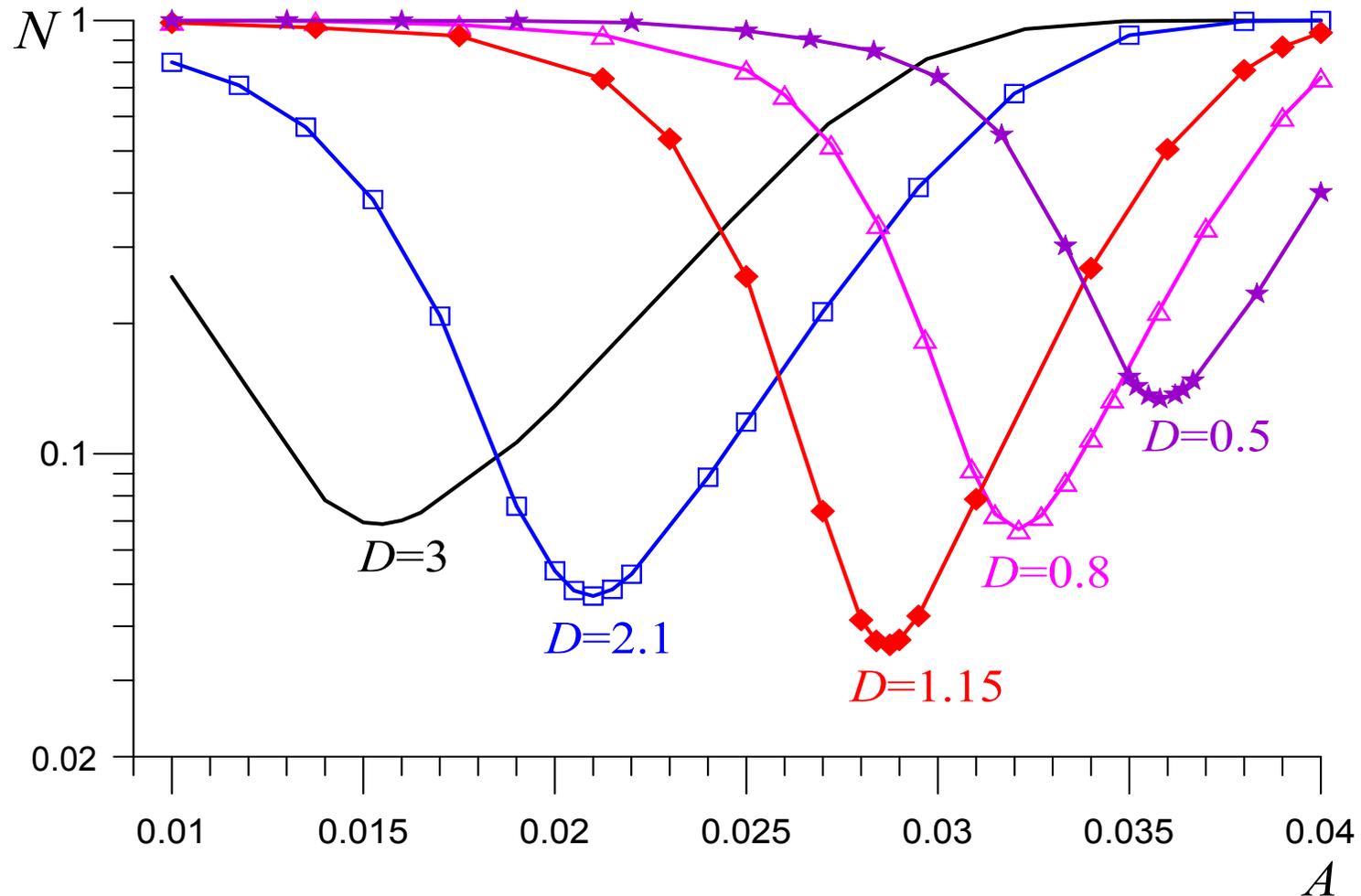
# Ошибка считывания как функция амплитуды импульса



# Ошибка считывания как функция длительности импульса



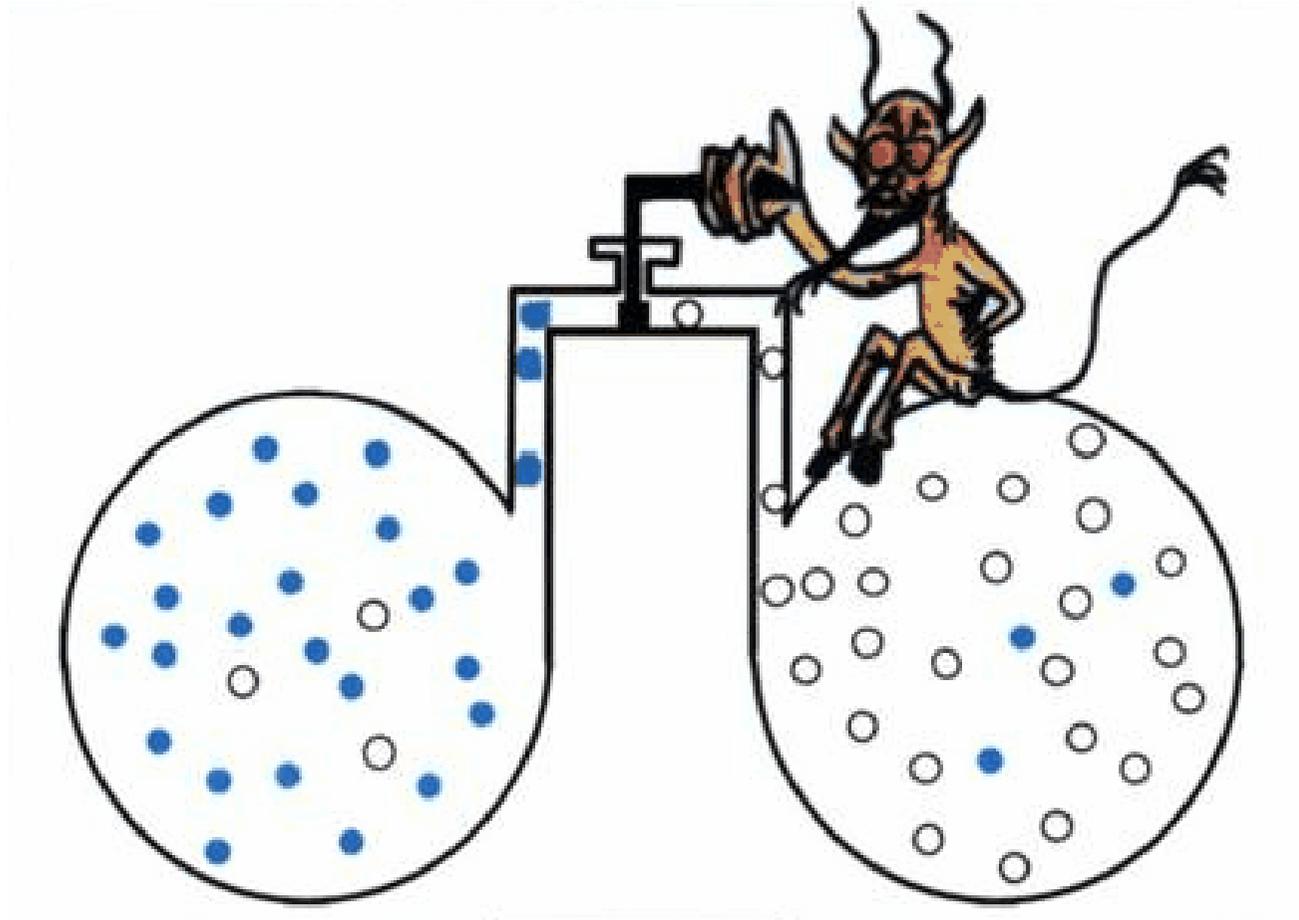
# Ошибка считывания как функция глубины потенциальной ямы



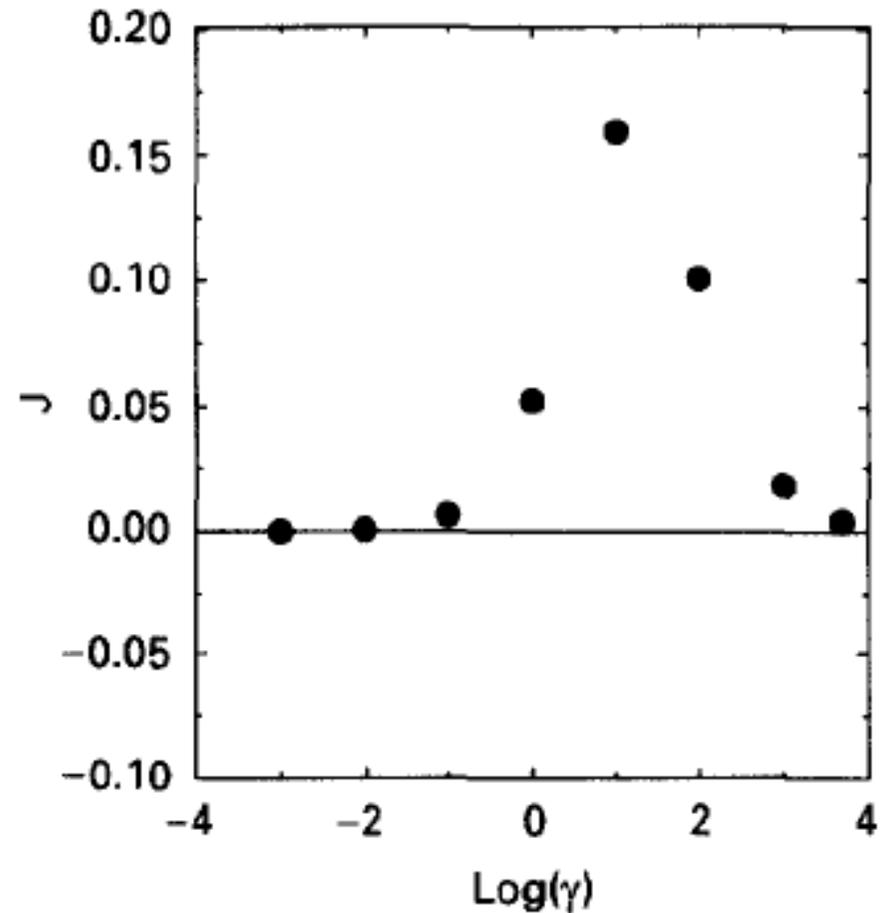
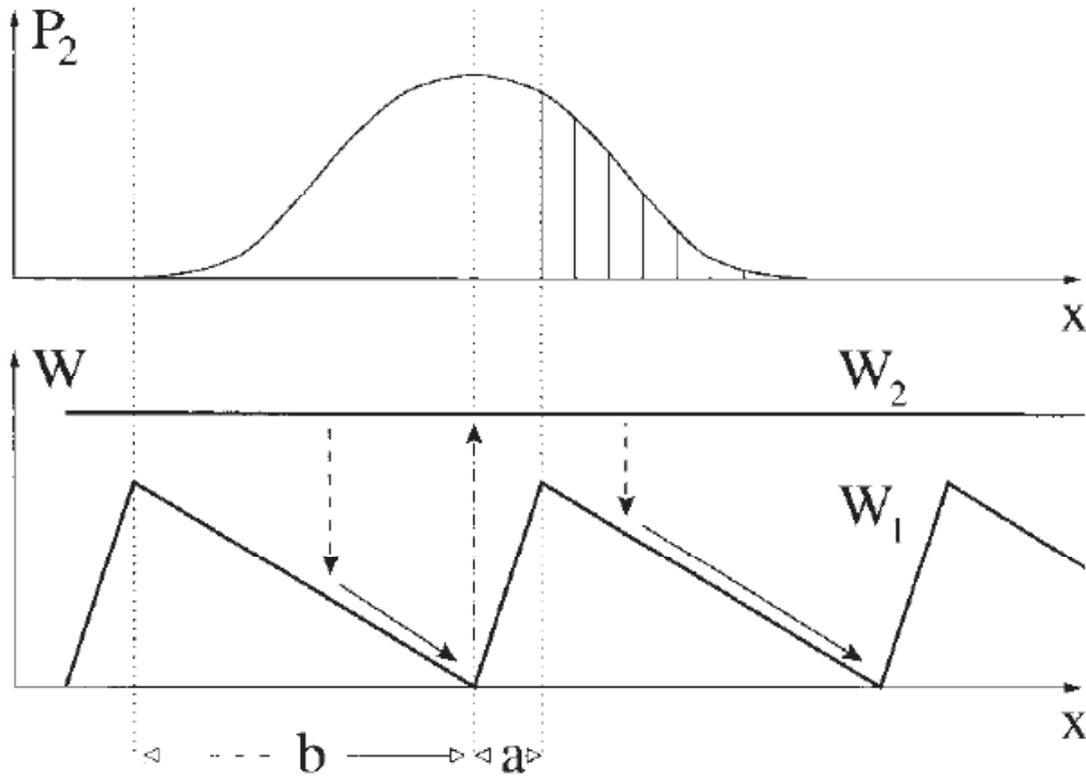
A.L. Pankratov and A.S. Gavrilov, Phys. Rev. B, 81, 052501 (2010).

L.S. Revin and A.L. Pankratov, Appl. Phys. Lett., 98, 162501 (2011).

## Диодный эффект (Ratchet effect)



## Диодный эффект (Ratchet effect)



F. Julicher, A. Ajdari, J. Prost, Rev. Mod. Phys., 69, 1269 (1997).

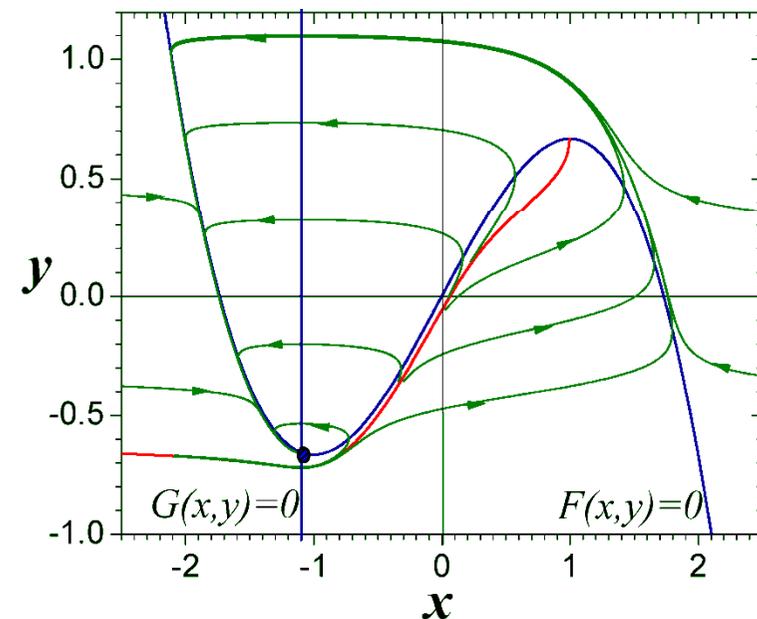
C. Doering, Physica A, 254, 1 (1998).

# Модели нейронов

Модель **ФитцХью-Нагумо** – двумерная модель, качественно описывающая способность нервной клетки генерировать импульсы действия. Одна из переменных модели,  $x$ , носит название переменной возбуждения (*excitation variable*) и имеет быстрый характер изменения во времени. Другая – восстанавливающая (*recovery variable*) переменная  $y$  – изменяется медленно:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) = x - x^3 / 3 - y \\ \dot{y} = G(x, y) = \varepsilon(x + I) \end{cases}$$

Фазовый портрет автономной системы ФитцХью-Нагумо. Синим цветом изображены изоклины горизонтальных и вертикальных наклонов; красным – линия, разделяющая потоки траекторий. Возможные фазовые траектории, полученные при различных начальных условиях, изображены зеленым цветом.



Модель **Ходжкина-Хаксли** – четырехмерная модель нервной клетки, описывающая возбудимые свойства мембран с помощью уравнений баланса ионных токов через мембрану.

$$C_m \frac{dv}{dt} = -G_K n^4 (v - v_K) - G_{Na} m^3 h (v - v_{Na}) - G_L (v - v_L) + S(t) + \xi(t);$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m m; \quad \frac{dh}{dt} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h h; \quad \frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n.$$

Здесь  $v$  задает отклонение мембранного потенциала от равновесного состояния ( $V = V_{eq} + v$ ). Шум  $\xi(t)$  - белый гауссов с нулевым средним и корреляционной функцией  $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D \delta(\tau)$ .

Влияние шума на возникновение спайков в системе рассматривается в условиях существования внешнего надпорогового периодического воздействия  $S(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi_0)$ .

Значения параметров максимальных проводимостей для натриевого, калиевого каналов и канала утечки соответственно равны:

$$G_{Na} = 120 \text{ mS/cm}^2, \quad G_K = 36 \text{ mS/cm}^2, \quad G_L = 0.3 \text{ mS/cm}^2;$$

$$\text{Емкость мембраны } C_m = 1 \text{ } \mu\text{F/cm}^2.$$

$$\text{Равновесные потенциалы: } v_{Na} = 115 \text{ mV}, \quad v_K = -12 \text{ mV}, \quad v_L = 10.6 \text{ mV}.$$

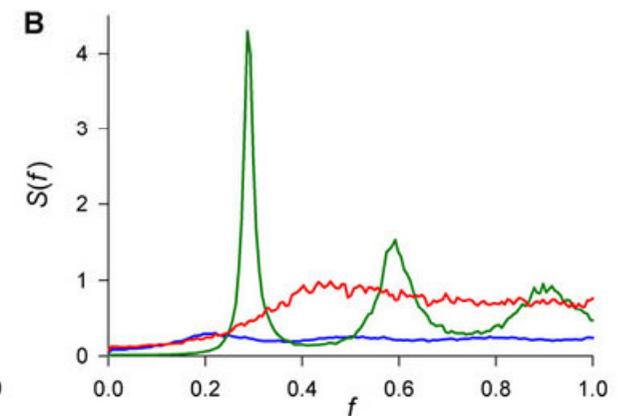
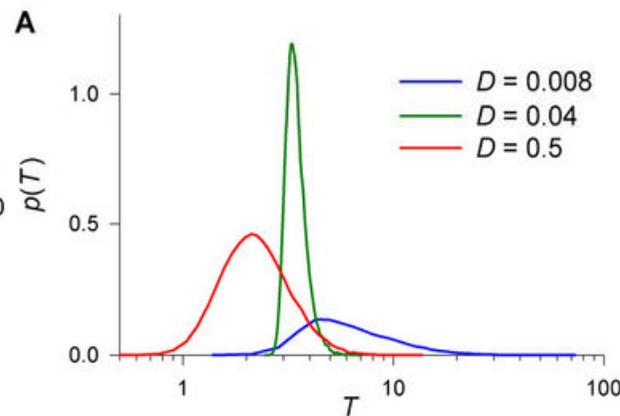
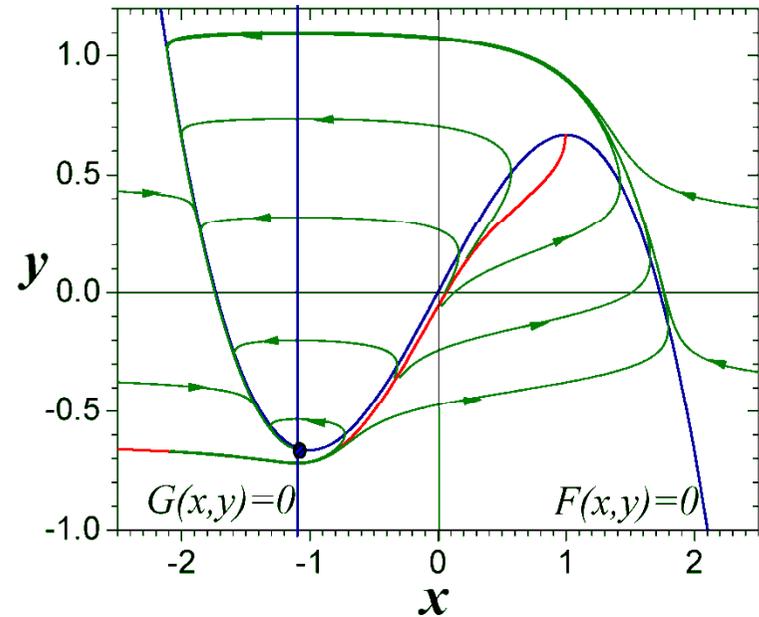
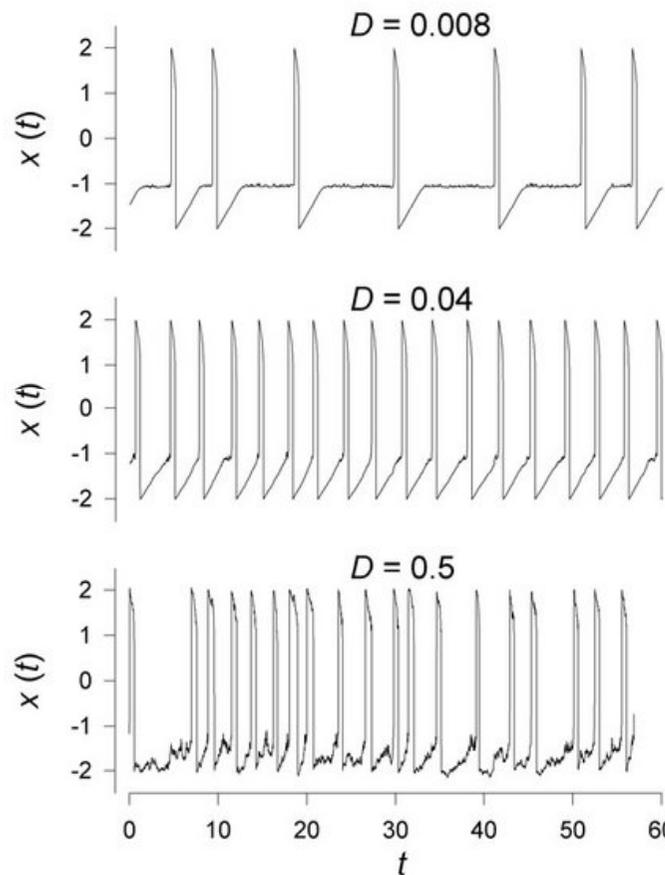
В результате анализа кинетических кривых активации и инактивации А. Ходжкиным и А. Хаксли были построены графические зависимости скоростей  $\alpha_m, \beta_m, \alpha_n, \beta_n, \alpha_h, \beta_h$  от мембранного потенциала и подобраны эмпирические соотношения, описывающие ход указанных зависимостей:

$$\alpha_m = \frac{0.1(25 - v)}{\exp\{(25 - v)/10\} - 1}; \quad \alpha_n = \frac{0.01(10 - v)}{\exp\{(10 - v)/10\} - 1}; \quad \alpha_h = 0.07 \exp\left\{\frac{-v}{20}\right\};$$

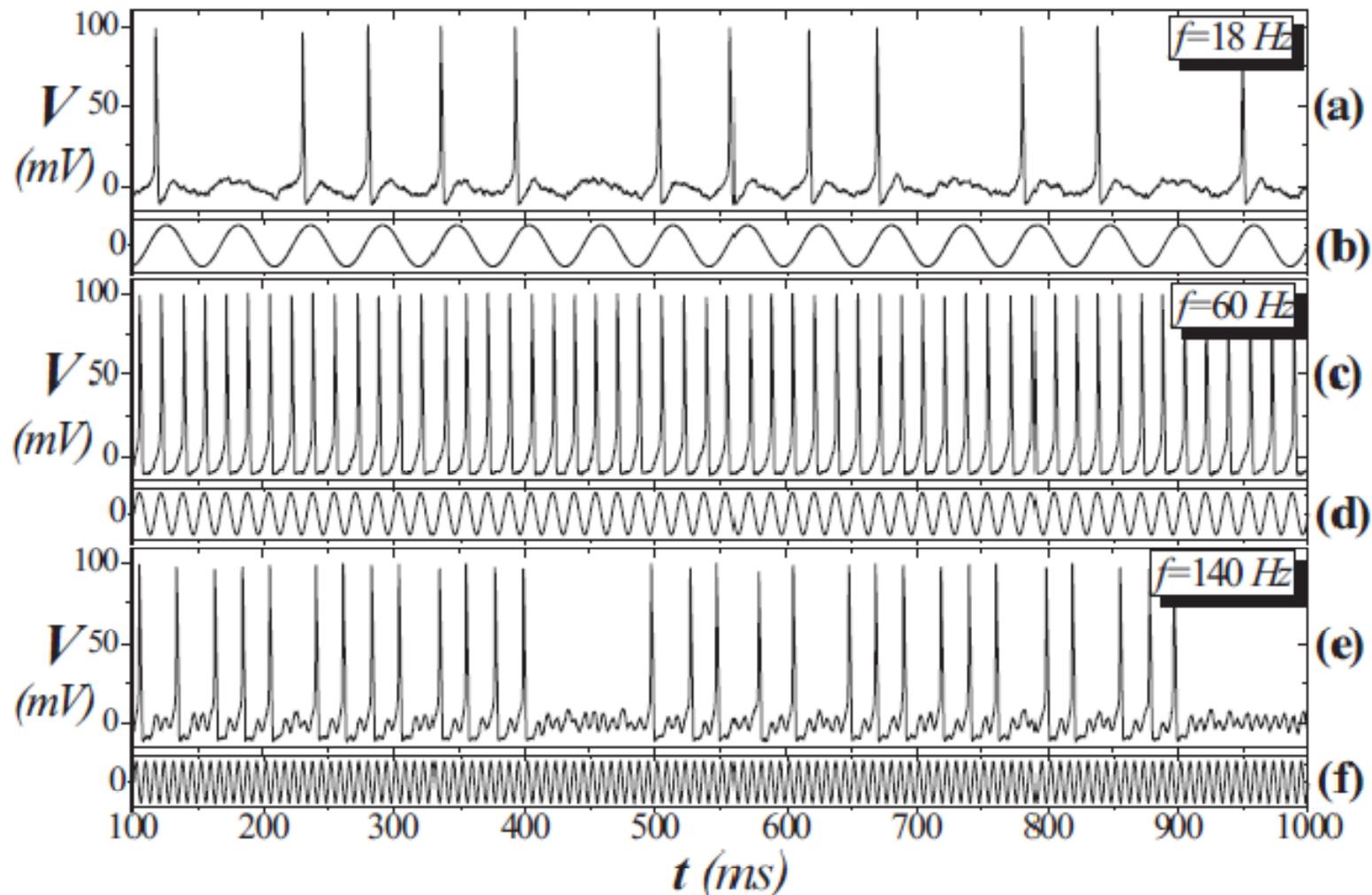
$$\beta_m = 4 \exp\left\{\frac{-v}{80}\right\}; \quad \beta_n = 0.125 \exp\left\{\frac{-v}{80}\right\}; \quad \beta_h = (\exp\{(30 - v)/10\} + 1)^{-1};$$

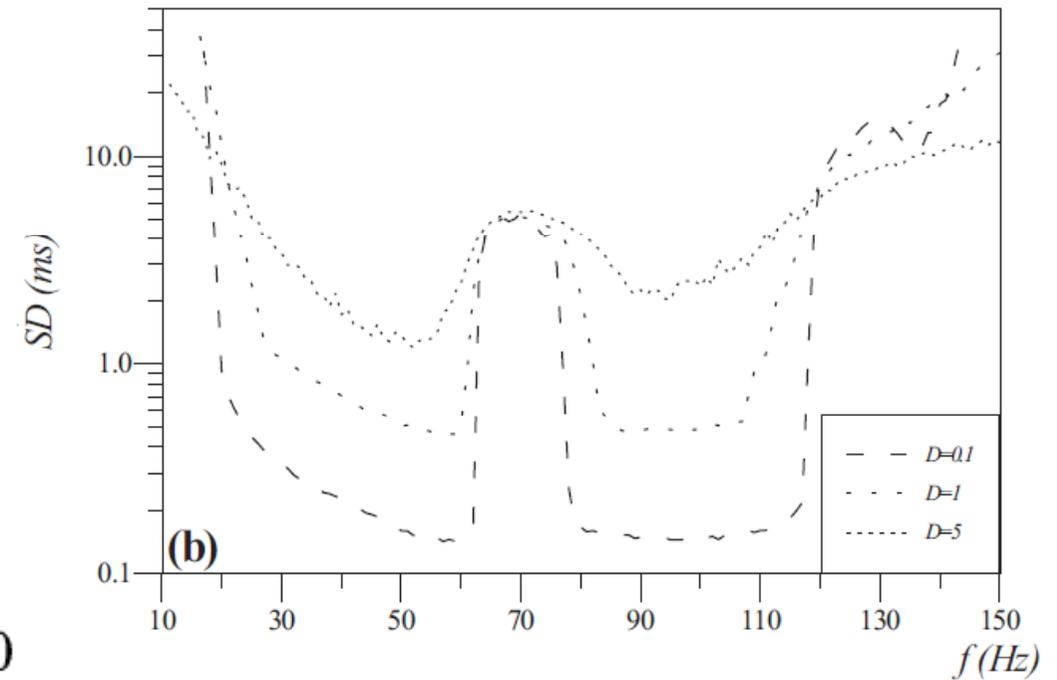
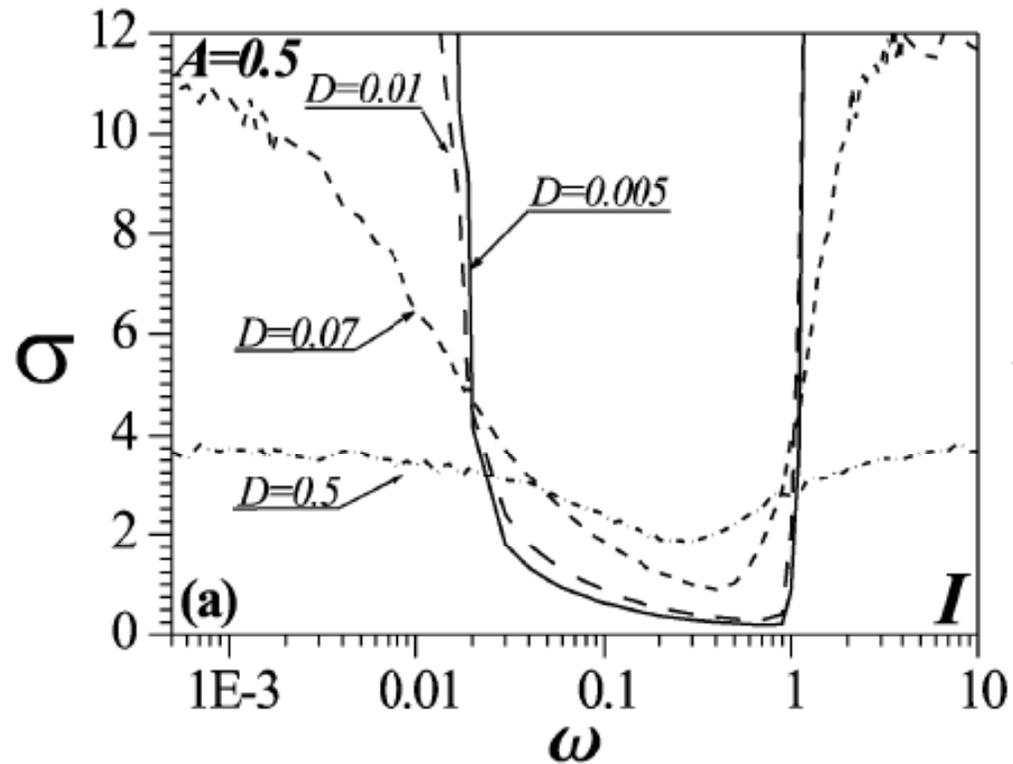
# Когерентный резонанс

Pikovsky AS, Kurths J, Coherence resonance in a noise-driven excitable system. Physical Review Letters 78:775-778 (1997).



# Подавление шума в нейронных системах





E.V. Pankratova, V.N. Belykh and E. Mosekilde, Eur. Phys. Journal B, 00401 (2006).

E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin and B. Spagnolo, Phys. Lett. A, 344, 43 (2005).

E.V. Pankratova, A.V. Polovinkin and E. Mosekilde, Eur. Phys. Journ. B, 45, 391 (2005).

**Спасибо за  
внимание!**