ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2016-2017 учебный год)

Задание 1

1) В строку одно за другим выписаны натуральные числа от 1 до 60. Из полученного числа нужно вычеркнуть сто цифр, чтобы оставшееся число было: а) наименьшим; б) наибольшим.
2) Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?
3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2+y^2+4x-8y=-7 \\ 2x^2+0{,}4y^2+2x-3y=-1{,}6 \end{cases}.$$

4) Найти все тройки целых чисел (x,y,z), для каждой из которых выполняется соотношение

$$2x^2+y^2+7z^2+2x^2y^2-42z+33=0.$$

5) Точка M – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Доказать, что центр окружности, проходящей через точки A, M и C, лежит на биссектрисе угла B.

Задание 2

1) Пусть m и n – натуральные числа, причем m/n – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь (2n-m)/(3n+2m), если она сократима?
2) В некотором городе автобусы имеют шестизначные номера от 000001 до 999999. Билет считается счастливым, если первые три его цифры нечетны и различны, вторые три цифры четны, причём цифры 1 и 2 не стоят рядом. Сколько всего существует различных номеров счастливых билетов?
3) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0 \\ 3x^2-2xy-1=0 \end{cases},$$

удовлетворяющие условию $xy>0$.
4) Определить все a, для каждого из которых неравенство

$$9x^2-x+\frac{1}{36}\geq y-9y^2-axy$$

выполняется для любых пар (x,y) таких, что $|x|=|y|$.
5) В равнобедренном треугольнике ABC, где AB=BC, высота BD делится точкой M так, что BM:MD=m:n. В каком отношении сторона BC делится прямой, проходящей через точки A и M?

Задание 3

1) Среди чисел вида 36^k-5^n, где k и n натуральные, найдите наименьшее по абсолютной величине.

2) Проценты содержания спирта в трёх растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третьей растворы в отношении 2:3:4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать из в отношении 3:2:1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?
3) Решить уравнение

$$\sqrt{2+\sqrt{6}-\left(6\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)x}=2x-\sqrt{2}\,.$$

4) . Найти все значения а, при каждом из которых уравнение

$$x^2-4x-2|x-a|+2+a=0$$

имеет ровно два различных решения.
5) Точка С лежит на отрезке АВ. Каждая пара равных окружностей, одна из которых проходит через точки А и С, а другая – через точки С и В, имеет, кроме С, ещё одну общую точку D. Найти геометрическое место точек D.

Задание 4

1) В работе школьной театральной студии принимает участие 31 человек. Суммарный возраст участников - 434 года. Докажите, что можно указать 20 участников, которым вместе нее меньше 280 лет.
2) Пункт А стоит в поле на некотором расстоянии от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт В так, что расстояние от А до В равно 10 км. Скорость движения автомобиля по дороге в 3 раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из А по прямой до некоторой находящейся на дороге точки С, отличной от В, а затем по дороге до В, то при любом выборе точки С на это уйдёт не меньше времени, чем потребуется, если ехать из А в В напрямик по полю. Найти расстояние от пункта А до дороги.
3) Решить неравенство $\sqrt{8-x^2}-\sqrt{18-x^2}\geq x$.
4) Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases}\left|x^2+5x+4\right|-9x^2+5x+4-10x|x|=0\\ x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0\end{cases}$$

5) Доказать, что произведение длин перпендикуляров, опущенных из какой-нибудь точки окружности на две противоположные стороны вписанного в неё четырехугольника, равно произведению длин перпендикуляров, опущенных из этой же точки на две другие стороны этого четырехугольника.

Задание 5

1) Доказать, что если целое число взаимно просто с 10, то его 101-я степень оканчивается теми же тремя цифрами, что и само число.
2) Что больше - $99^{50}+100^{50}$ или 101^{50}?
3) Решить в целых числах x, y, p уравнение

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}_{y\ корней}=p\,.$$

4) При всех значениях параметра a решить уравнение $\sqrt{4|x|-x^2}=a$.

5) Через центр правильного треугольника проведена произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.