8 класс **2017-2018 г.**

Задание № 2

Задача 1

p – простое число такое, что $p^2–1$ не делится на 24. Найдите все p.

Решение

При $p = 2$ $p^2–1 = 4–1 = 3$, 3 не делится на 24.

При $p = 3$ $p^2–1 = 9–1 = 8$, 8 не делится на 24.

Пусть $p > 3$, p – простое число. Докажем, что $p^2–1$ делится на 24. Разложим 24 на простые множители: $24 = 2^3·3$. Для того, чтобы доказать, что $p^2–1$ делится на 24, нужно доказать, что $p^2–1$ делится на 3 и на 8. $p^2–1 = (p–1)(p+1)$.

$p–1$, p, $p+1$ – три последовательных натуральных числа, одно из трех последовательных натуральных чисел делится на 3. Так как p простое и $p > 3$, то p на 3 не делится, значит, одно из чисел $p–1$ или $p+1$ делится на 3, следовательно, $p^2–1 = (p–1)(p+1)$ делится на 3.

Так как p простое и $p > 3$, то p – число нечетное, следовательно, $p–1$ и $p+1$ – четные. $p–1$ и $p+1$ – два последовательных четных числа, тогда одно из них делится на 4, значит, $p^2–1 = (p–1)(p+1)$ делится на $2·4 = 8$, то есть, $p^2–1$ делится на 8.

Таким образом, $p^2–1$ делится на 3 и на 8, следовательно, при $p > 3$ $p^2–1$ делится на 24, где p – простое число.

Ответ: 2; 3.

Задача 2

Решите уравнение $|15x-6|-|4-25x^2|=0$.

Решение.

1 способ.

$$|15x-6|-|4-25x^2|=0;$$

$$|15x-6|=|4-25x^2|;$$

Модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа равны или противоположны.

$15x - 6 = 4 - 25x^2$ или $15x - 6 = 25x^2 - 4$;

$3(5x - 2) - (2 - 5x)(2 + 5x) = 0$;

$(5x - 2)(3 + 2 + 5x) = 0$;

$(5x - 2)(5 + 5x) = 0$;

$5x - 2 = 0$ или $5 + 5x = 0$;

$5x = 2$; $5x = -5$;

$x = 0{,}4$. $x = -1$.

$3(5x - 2) - (5x - 2)(5x + 2) = 0$;

$(5x - 2)(3 - 5x - 2) = 0$;

$(5x - 2)(1 - 5x) = 0$;

$5x - 2 = 0$ или $1 - 5x = 0$;

$5x = 2$; $5x = 1$;

$x = 0{,}4$. $x = 0{,}2$.

2 способ.

$$|15x-6|-|4-25x^2|=0;$$

$$|3(5x-2)|-|(2-5x)(2+5x)|=0;$$

$$3|5x-2|-|2-5x|\cdot|2+5x|=0;$$

$$3|5x-2|-|5x-2|\cdot|2+5x|=0;$$

$$|5x-2|\cdot(3-|2+5x|)=0;$$

$|5x-2|=0$ или $3-|2+5x|=0$;

$5x - 2 = 0$;

$5x = 2$;

$x = 0{,}4$.

$|2+5x|=3$;

$2 + 5x = 3$ или $2 + 5x = -3$;

$5x = 1$; $5x = -5$;

$x = 0{,}2$. $x = -1$.

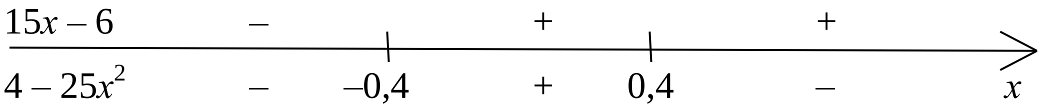
3 способ.

Найдем нули выражений, стоящих под знаком модуля.

1) $15x - 6 = 0$; $15x = 6$; $x = 0{,}4$.

2) $4 - 25x^2 = 0$; $(2 - 5x)(2 + 5x) = 0$; $2 - 5x = 0$ или $2 + 5x = 0$; $5x = 2$ или $5x = -2$; $x = 0{,}4$ или $x = -0{,}4$.

Получили два значения переменной x: $x = 0{,}4$ или $x = -0{,}4$. Они разбивают числовую ось на три промежутка. Определим знаки выражений, стоящих под знаком модуля, на каждом из полученных промежутков.



Решим уравнение на каждом из полученных промежутков.

1. $\begin{cases} x < -0{,}4; \\ 6 - 15x + 4 - 25x^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -0{,}4; \\ 3(2 - 5x) + (2 - 5x)\cdot(2 + 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -0{,}4; \\ (2 - 5x)\cdot(3 + 2 + 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -0{,}4; \\ (2 - 5x)\cdot(5 + 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -0{,}4; \\ x = -1,\ x = 0{,}4; \end{cases}$

$x = -1$.

3. $\begin{cases} x > 0{,}4; \\ 15x - 6 + 4 - 25x^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0{,}4; \\ 3(5x - 2) + (2 - 5x)\cdot(2 + 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0{,}4; \\ (5x - 2)\cdot(3 - 2 - 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0{,}4; \\ (5x - 2)\cdot(1 - 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0{,}4; \\ x = 0{,}2 :\ x = 0{,}4; \end{cases}$

система не имеет решений.

2. $\begin{cases} -0{,}4 \le x \le 0{,}4; \\ 15x - 6 - (4 - 25x^2) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -0{,}4 \le x \le 0{,}4; \\ 3(5x - 2) - (2 - 5x)\cdot(2 + 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -0{,}4 \le x \le 0{,}4; \\ (5x - 2)\cdot(3 - 2 - 5x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -0{,}4 \le x \le 0{,}4; \\ (5x - 2)\cdot(1 - 5x) = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} -0{,}4 \le x \le 0{,}4; \\ x = 0{,}2;\ x = 0{,}4; \end{cases}$$

$x = 0{,}2$; $x = 0{,}4$.

Ответ: $x = -1$; $x = 0{,}2$; $x = 0{,}4$.

Задача 3

Решите в целых числах уравнение $3xy + 3x + y = 2017$.

Решение

Преобразуем уравнение таким образом, чтобы в левой части стояло произведение двух целых множителей, а в правой – целое число.

$$3xy + 3x + y = 2017;$$

$$3xy + 3x + y + 1 = 2017 + 1;$$

$$3x(y+1) + (y+1) = 2018;$$

$$(3x+1)\cdot(y+1) = 2018.$$

Так как x и y числа целые, то $3x + 1$ и $y + 1$ числа целые. Тогда равенство $(3x+1)\cdot(y+1) = 2018$ будет справедливо тогда и только тогда, когда $3x + 1$ и $y + 1$ являются целыми делителями числа 2018, произведение которых равно 2018.

Разложим число 2018 на простые множители: $2018 = 2\cdot1009$. Докажем, что число 1009 является простым. Так как $31^2 < 1009 < 32^2$, то, для того, чтобы доказать, что число 1009 является простым, достаточно показать, что оно не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих 31. Этими простыми числами являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Число 1009 не делится на 2 и на 5, так как последняя цифра 9 на 2 и на 5 не делится. Сумма цифр числа 1009 1+0+0+9=10, 10 не делится на 3, значит, 1009 на 3 не делится. Разность сумм цифр числа 1009, стоящих на четных и нечетных местах, (9+0)–(1+0)=8 не делится на 11, значит, и число 1009 на 11 не делится. Делимость на остальные простые числа проверяем непосредственным делением: 1009=7·144+1, 1009=13·77+8, 1009=17·59+6, 1009=19·53+2, 1009=23·43+20, 1009=29·34+23, 1009=31·32+17. Таким образом, число 1009 является простым. Значит, число 2018 имеет 8 целых делителей: ±1; ±2; ±1009; ±2018.

Рассмотрим все возможные представления числа 2018 в виде произведения двух целых множителей:

$$2018 = 1\cdot 2018 = 2\cdot 1009 = -1\cdot(-2018) = -2\cdot(-1009).$$

С учетом порядка множителей получаем 8 систем уравнений.

1) $\begin{cases} 3x+1=1, \\ y+1=2018; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=0, \\ y=2017; \end{cases}$

$\begin{cases} x=0, \\ y=2017. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+1=2018, \\ y+1=1; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=2017, \\ y=0. \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 2017 на 3 не делится.

3) $\begin{cases} 3x+1=2, \\ y+1=1009; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=1, \\ y=1008. \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как 1 на 3 не делится.

4) $\begin{cases} 3x+1=1009, \\ y+1=2; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=1008, \\ y=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=336, \\ y=1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+1=-2018, \\ y+1=-1; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=-2019, \\ y=-2; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-673, \\ y=-2. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x+1=-1, \\ y+1=-2018; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=-2, \\ y=-2019. \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как –2 на 3 не делится.

7) $\begin{cases} 3x+1=-1009, \\ y+1=-2; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=-1010, \\ y=-3. \end{cases}$

Система не имеет решений в целых числах, так как –1010 на 3 не делится.

8) $\begin{cases} 3x+1=-2, \\ y+1=-1009; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=-3, \\ y=-1010; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-1, \\ y=-1010. \end{cases}$

Ответ: $x = 0$, $y = 2017$;

$x = 336$, $y = 1$;

$x = –673$, $y = –2$;

$x = –1$, $y = –1010$.

Задача 4

Морская вода содержит 5% (по массе) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в воде составляло 2%?

Решение

Найдем сначала, сколько килограммов соли содержится в 40 кг морской воды: $40 \cdot 0,05 = 2$ (кг).

Так как в пресной воде соли не содержится, по после добавления пресной воды к морской масса соли в воде не изменится. Найдем массу раствора с 2% содержанием соли, масса соли в котором равна 2 кг: $2:0,02 = 100$ (кг).

Найдем теперь количество пресной воды, которую нужно было добавить к 40 кг морской воды: $100 – 40 = 60$ (кг).

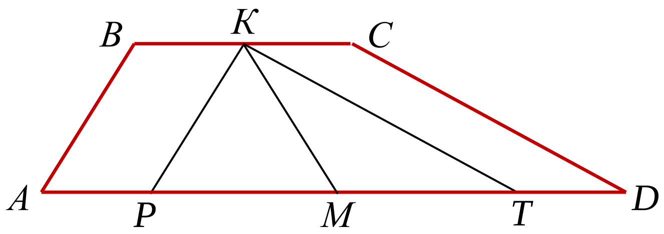
Ответ: 60 кг.

Задача 5

Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

Решение

Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, $\angle A + \angle D = 90°$, K – середина BC, M – середина AD.



1 способ.

Проведем $KP \parallel AB$, $P \in AD$; $KT \parallel CD$, $T \in AD$.

В четырехугольнике $ABKP$ $KP \parallel AB$ по построению, $KB \parallel AP$ как основания трапеции, значит, $ABKP$ – параллелограмм (по определению параллелограмма), следовательно, $BK = AP$ (по свойству параллелограмма).

В четырехугольнике $KCDT$ $KT \parallel CD$ по построению, $KC \parallel DT$ как основания трапеции, значит, $KCDT$ – параллелограмм (по определению параллелограмма), следовательно, $CK = DT$ (по свойству параллелограмма).

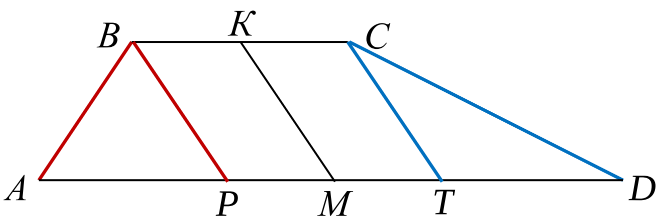
Так как K – середина BC, M – середина AD, то $BK = KC$, $AM = MD$, тогда в силу доказанного выше равенства отрезков $BK = AP$ и $CK = DT$ имеем $PM = AM - AP = AM - BK = DM - CK = DM - DT = MT$, следовательно, M – середина PT.

$\angle A = \angle KPT$ как соответственные при $KP \parallel AB$ и секущей AP; $\angle D = \angle KTP$ как соответственные при $KT \parallel CD$ и секущей DT. Тогда $\angle KTP + \angle KPT = \angle D + \angle A = 90°$.

Рассмотрим ΔKPT. По теореме о сумме углов треугольника $\angle KTP + \angle KPT + \angle PKT = 180°$, следовательно, $\angle PKT = 180° - (\angle KTP +$ $+ \angle KPT) = 180° - 90° = 90°$, значит, ΔKPT – прямоугольный. KM – медиана прямоугольного треугольника KPT, проведенная к гипотенузе, следовательно, $KM = 0{,}5PT$.

$PT = AD - (AP + TD) = AD - (BK + KC) = AD - BC$. Таким образом, $KM = 0{,}5PT = 0{,}5(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

2 способ.



Построим $\angle ABP = \angle A$, $P \in AD$, $\angle DCT = \angle D$, $T \in AD$.

По теореме о сумме углов четырехугольника $\angle A + \angle ABC + \angle BCD + \angle D = 360°$. Тогда

$\angle A + \angle ABP + \angle PBC + \angle BCT + \angle TCD + \angle D = 360°$, значит, $\angle PBC + \angle BCT = 360° - (\angle A + \angle ABP + \angle TCD + \angle D) = 360° - 2\cdot(\angle A + \angle D) = 360° - 2\cdot 90° = 180°$.

Таким образом, $\angle PBC + \angle BCT = 180°$ – односторонние при прямых BP и CT, секущей BC, значит, $BP \parallel CT$ по признаку параллельности прямых.

Рассмотрим четырехугольник $BCTP$. $BC \parallel PT$ как основания трапеции, $BP \parallel CT$ по доказанному, значит, $BCTP$ – параллелограмм (по определению параллелограмма), следовательно, $BC = PT$, $BP = CT$ (по свойству параллелограмма).

Рассмотрим ΔABP. $\angle ABP = \angle A$ по построению, значит, ΔABP – равнобедренный (по признаку), следовательно, $AP = BP$.

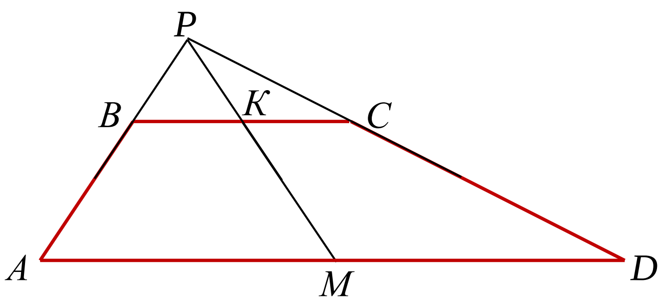
Рассмотрим ΔCTD. $\angle DCT = \angle D$ по построению, значит, ΔCTD – равнобедренный (по признаку), следовательно, $CT = TD$.

Так как K – середина BC, M – середина AD, то $BK = KC$, $AM = MD$, тогда в силу доказанного выше равенства отрезков $BC = PT$, $BP = CT$, $AP = BP$, $CT = TD$ имеем $AP = BP = BP = CT = CT = TD$, то есть $AP = TD$, тогда $PM = AM - AP = MD - TD = MT$, следовательно, M – середина PT. Таким образом, $PM = 0{,}5PT = 0{,}5BC = BK$.

Рассмотрим четырехугольник $BKMP$. $BK \parallel PM$ как основания трапеции, $BK = PM$, значит, $BKMP$ – параллелограмм (по признаку параллелограмма), следовательно, $BP = KM$ (по свойству параллелограмма).

Таким образом, $KM = BP = AP = TD = 0{,}5(AD - PT) = 0{,}5(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

3 способ.



Продолжим боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ до пересечения в точке P.

$\angle A = \angle PBC$ как соответственные при $BC \parallel AD$ и секущей AP.

Рассмотрим ΔAPD. По теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle D + \angle APD = 180°$. Тогда $\angle APD = 180° - (\angle A + \angle D) = 180° - 90° = 90°$, значит, ΔAPD – прямоугольный. PM – медиана прямоугольного треугольника APD, проведенная к гипотенузе, следовательно, $PM = 0{,}5AD$.

Рассмотрим ΔBPC. $\angle BPC = 90°$, значит, ΔBPC – прямоугольный. PK – медиана прямоугольного треугольника BPC, проведенная к гипотенузе, следовательно, $PK = 0{,}5BC$.

Покажем, что точки P, K и M лежат на одной прямой.

Рассмотрим ΔAPM. Так как M – середина AD, то $AM = 0{,}5AD = PM$, значит, ΔAPM – равнобедренный (по определению), следовательно, $\angle A = \angle APM$ (по свойству равнобедренного треугольника).

Рассмотрим ΔBPC. Так как K – середина BC, то $BK = 0{,}5BC = PK$, значит, ΔBPC – равнобедренный (по определению), следовательно, $\angle PBC = \angle BPK$ (по свойству равнобедренного треугольника).

Из равенства углов $\angle A = \angle PBC$, $\angle A = \angle APM$, $\angle PBC = \angle BPK$ следует, что $\angle APM = \angle BPK = \angle APK$, следовательно, точки P, K и M лежат на одной прямой.

$KM = PM - PK = 0{,}5AD - 0{,}5BC = 0{,}5(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Для обоснования того, что точки P, K и M лежат на одной прямой, можно было воспользоваться свойством трапеции: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.