9 класс **Решения** **2017-2018 гг.**

Задание 2

Задача 1

Первые пять мест в некотором конкурсе заняли *A*, *B*, *C*, *D* и *E*. Пытаясь угадать результаты, некто предположил, что получится последовательность *A, B, C, D, E*. Но оказалось, что он не угадал ни места кого-либо из призёров, ни какой-либо пары следующих непосредственно друг за другом участников. Некто другой, предполагая результат *D, A, E, C, B*, указал правильно места двух участников, а также две пары непосредственно следующих друг за другом участников. Каков на самом деле результат конкурса?

Решение

Если в угаданной паре непосредственно следующих друг за другом участников правильно указано место одного участника, то правильно указано и место второго.

Предположим, угадана последовательность *DAE* (пары *DA* и *AE*), тогда угаданы места трёх участников. Аналогично не удовлетворяют условиям задачи последовательности *AEC* и *ECB*.

Таким образом, возможны следующие случаи: *DA* и *EC*, *DA* и *CB*, *AE* и *CB*, причём одна угаданная пара стоит на своём месте, а вторая нет.

В первом случае верные места могут быть только у *D* и *A*, то есть верная последовательность – *DABEC*, но тогда первым отгадывающим угадана пара *AB*.

Во втором случае возможные последовательности – *DACBE* и *EDACB*, последняя удовлетворяет условиям задачи.

В третьем случае верной парой может быть только *CB* и получается последовательность *AEDCB*, то есть первым отгадывающим было верно определено первое место.

Ответ: *EDACB*.

Задача 2

Запись числа a состоит из $2n$ цифр x, числа b – из n цифр y, числа c – из n цифр z. Определить цифры x, y, z, если известно, что равенство $\sqrt{a-2b}=3c$ справедливо, по крайней мере, для двух значений n.

Решение

Тривиальный случай (x=y=z=0) далее рассматривать не будем. По условию,

$$a = x\cdot 10^{2n-1} + x\cdot 10^{2n-2} + \ldots + 10x + x = x\left(10^{2n-1} + \ldots + 10 + 1\right) = x\frac{10^{2n}-1}{9},$$

$$b = y\cdot 10^{n-1} + \ldots + 10y + y = y\left(10^{n-1} + \ldots + 10 + 1\right) = y\frac{10^n - 1}{9},\ c = z\frac{10^n - 1}{9}.$$

Подставляя в равенство, получаем

$$\sqrt{\frac{10^n - 1}{9}\left(x\left(10^n + 1\right) - 2y\right)} = 3z\frac{10^n - 1}{9},$$

$$x\left(10^n + 1\right) - 2y = \left(10^n - 1\right)z^2.\ (*)$$

Пусть исходное равенство и, следовательно, равенство (*), справедливо для n_1 и n_2, $n_1 < n_2$. Тогда

$$x\left(10^{n_2} - 10^{n_1}\right) = \left(10^{n_2} - 10^{n_1}\right)z^2,$$

$x = z^2$ и из (*) получаем $2x - 2y = 0$, $x = y$. Исходное равенство при этом принимает вид

$$\sqrt{\frac{10^n - 1}{9}\left(z^2\left(10^n - 1\right)\right)} = 3z\frac{10^n - 1}{9},\ z\frac{10^n - 1}{3} = 3z\frac{10^n - 1}{9},$$

то есть выполнено для всех натуральных n.

Таким образом, возможные тройки цифр – (1,1,1), (4,4,2), (9,9,3).

Ответ: (0,0,0), (1,1,1), (4,4,2), (9,9,3).

Задача 3

В сосуд, содержащий 1 л воды, из двух кранов одновременно начинают наливать растворы кислоты: из первого – 10%-ный со скоростью 1 л в час, из второго – 20%-ный со скоростью v литров в час. Для получения пятипроцентной концентрации кислоты в сосуде потребовалось более пяти минут. Если бы из первого крана подавался 20%-ный раствор, а из первого – 10%-ный, то концентрация кислоты в сосуде достигла бы значения 5% на $3\frac{3}{7}$ мин позже. Найти v.

Решение

После того, как краны были открыты t минут, объём жидкости в сосуде составит $t(1+v)/60+1$ литров, а количество кислоты - $t(0{,}1+0{,}2v)/60$ литров в первом случае и $t(0{,}2+0{,}1v)/60$ во втором. Таким образом, если t – время, за которое концентрация кислоты достигла 5% в первом случае,

$$\frac{0{,}1t(1+2v)/60}{t(1+v)/60+1} = 0{,}05,$$

$$\frac{0{,}1\left(t+3\frac{3}{7}\right)(2+v)/60}{\left(t+3\frac{3}{7}\right)(1+v)/60+1} = 0{,}05.$$

Преобразуя выражения, получаем

$$\begin{cases} t(1+2v)=0{,}5t(1+v)+30 \\ \left(t+3\frac{3}{7}\right)(2+v)=0{,}5\left(t+3\frac{3}{7}\right)(1+v)+30 \end{cases},$$

$$\begin{cases} t+3tv=60 \\ 3t+tv+3\frac{3}{7}(v+3)=60 \end{cases},$$

$$\begin{cases} tv=20-t/3 \\ t/3+3(v+3)/7=5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} tv=20-t/3 \\ v=(78-7t)/9 \end{cases}.$$

Подставляя v, выраженное из второго уравнения, в первое уравнение, получаем после преобразования

$$7t^2-81t+180=0,\ t_1=3,\ t_2=\frac{60}{7}=8\frac{4}{7}.$$

Условиям задачи удовлетворяет второй корень, следовательно, $v=(78-60)/9=2$.

Ответ: 2 литра в час.

Задача 4

Найти область определения и множество значений функции $y=3x+4\sqrt{1-x^2}$.

Решение

Область определения: $1-x^2\ge 0$, $-1\le x\le 1$.

Пусть $-1\le x\le 1$. Тогда $(y-3x)^2=16(1-x^2)$, $25x^2-6xy+y^2-16=0$. Пытаясь разрешить последнее выражение относительно x, получаем, что дискриминант $36y^2-100(y^2-16)$ должен быть неотрицательным, то есть $25-y^2\ge 0$, $|y|\le 5$. Значение $y=5$ достигается при $x=3/5$. Значение $y=-5$ возможно при $x=-3/5$. Подстановкой убеждаемся, что исходному равенству удовлетворяет только первая пара значений. Следовательно, $y=5$ - наибольшее значение функции.

Чтобы найти наименьшее значение функции, заметим, что функция $y=3x$ возрастает при $-1\le x\le 1$, функция $y=4\sqrt{1-x^2}$ возрастает при $-1\le x\le 0$ и убывает при $0\le x\le 1$. Таким образом, на отрезке $-1\le x\le 0$ исходная функция возрастает, $y(-1)=-3$, $y(0)=4$. При

$0 \le x \le 1$ $y \ge 0$. Таким образом, $y = -3$ - наименьшее значение функции.

Ответ: $-1 \le x \le 1$, $-3 \le y \le 5$.

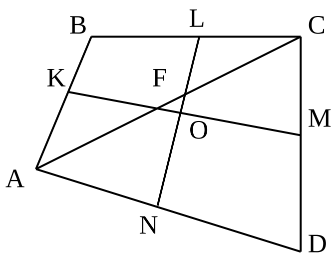
Задача 5

Доказать, что если сумма расстояний между серединами противолежащих сторон выпуклого четырехугольника равна его полупериметру, то четырехугольник является параллелограммом.

Решение

I способ. Пусть K, L, M, N – середины сторон четырехугольника ABCD, точка O – пересечение отрезков KM и LN, точка F – середина диагонали AC.

Так как KL – средняя линия треугольника ABC, MN – средняя линия треугольника ADC, KL||AC||MN, KL=MN=1/2AC, то есть KLMN – параллелограмм, KO=OM, LO=ON.



LF+FN≥LN, причём равенство достигается, если F лежит на LN,

KF+FM≥KM, причём равенство достигается, если F лежит на KM.

Складывая неравенства, получаем

LF+FN+KF+FM≥LN+KM, равенство достигается, только если точки F и O совпадают.

Так как LF – средняя линия треугольника ACB, LF=1/2AB. Аналогично показываем, что FN=1/2CD, KF=1/2BC, FM=1/2AD, причём LF||AB, FN||CD, KF||BC,FM||AD.

Таким образом, 1/2(AB+BC+CD+AD)≥LN+KN. Используя условия задачи заключаем, что точки F и O совпадают.

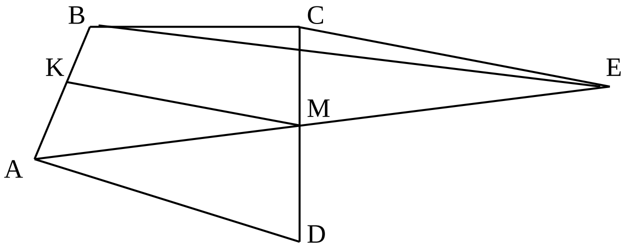
По указанному ранее, AB||NL||CD, BC||KM||AD, то есть ABCD – параллелограмм.

II способ. Докажем сначала вспомогательное утверждение. Пусть ABCD – выпуклый четырехугольник, KM – средняя линия. Тогда KM≤1/2(BC+AD), причём равенство достигается только в случае BC||AD.

На прямой AM поставим точку E так, чтобы AM=ME. Треугольники AMD и EMC равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, CE=AD и CE||AD ввиду равенства углов CEA и MAD.

KM – средняя линия треугольника BAE, поэтому

KM=1/2BE≤1/2(BC+CE)=1/2(BC+AD), равенство достигается, если точки B, C, E лежат на одной прямой, KM||BC||AD. Утверждение доказано.



Имеем, KM≤1/2(BC+AD), LN≤1/2(AB+CD), следовательно,

KM+LN≤1/2(AB+BC+CD+AD), равенство возможно только если AB||CD, BC||AD, что и требовалось доказать.