Задание 3

Задача 1

Петя и Вася играют в следующую игру. На доске написано уравнение

$$x^3+\ldots x^2+\ldots x+\ldots=0.$$

Петя ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от нуля. Затем Вася ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, Петя ставит целое число на последнее свободное место и побеждает, если все три корня получившегося уравнения – целые числа. Придумайте для Пети выигрышную стратегию.

Решение

Пусть получилось уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$. Его корнем будет число 1, если

$$1+a+b+c=0,$$

а число (–1) – если

$$-1+a-b+c=0,$$

то есть уравнение гарантированно будет иметь два целых корня, если

$$a+c=0 \text{ и } b=-1.$$

Уравнение при этом примет вид $x^3+ax^2-x-a=0$. Поделив на x^2-1, получаем $x+a=0$, то есть третий корень $x=-a$.

Получаем следующую стратегию. Поставить –1 перед *x*. Затем, если Вася запишет на одно свободных мест число *a*, поставить на последнее свободное место число –*a*.

Задача 2

Сколькими различными способами можно представить целое положительное число *n* в виде суммы трёх положительных целых слагаемых? Два представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Решение

Натуральное число k>1 в виде суммы двух слагаемых можно представить с помощью k – 1 способа:

$$1+(k–1)=2+(k–2)=\ldots=(k–1)+1.$$

Таким образом, если первое слагаемое 1, то есть *n*–2 способа получить сумму *n*, если второе слагаемое 2 – *n*–3 способа, и так далее, если первое слагаемое *n*–2 – 1 способ. Следовательно, общее число способов равно 1+2+…+(*n*–2)=(*n*–1)(*n*–2)/2.

Ответ: (*n*–1)(*n*–2)/2.

Задача 3

Товарный поезд, шедший из *A* в *B*, прибыл на станцию *C* одновременно с пассажирским, шедшим из *B* в *A* со скоростью в *m* раз большей, чем товарный. Оба поезда, простояв на станции *C* по *t* часов, продолжили свой путь, причём каждый из них увеличил скорость на 25% по сравнению с первоначальной. Товарный поезд прибыл в *B* на t_1 часов позже, а пассажирский прибыл в *A* на t_2 часов позже, чем если бы они двигались без остановки с первоначальными скоростями. Насколько раньше товарный поезд вышел из *A*, чем пассажирский из *B*?

Решение

Пусть товарный поезд вышел из *A* на *x* часов раньше, чем пассажирский из *B*. Обозначим через τ_1 время, которое нужно товарному поезду, чтобы доехать с первоначальной скоростью из *A* в *C*, через τ_2 - время, за которое товарный поезд с первоначальной скоростью доехал бы из *C* в *B*. Тогда получаем из условий задачи

$$\tau_1 = x + \tau_2 / m,$$

$$\tau_1 + \tau_2 + t_1 = \tau_1 + \frac{\tau_2}{1{,}25} + t,$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{m} + t_2 = \frac{\tau_1}{1{,}25m} + \frac{\tau_2}{m} + t.$$

Таким образом,

$$\tau_2 = 5(t - t_1),$$

$$\tau_1 = 5m(t - t_2),$$

$$x = \tau_1 - \tau_2 / m = 5m(t - t_2) - 5(t - t_1)/m.$$

Ответ: $5m(t - t_2) - 5(t - t_1)/m$.

Задача 4

При всех значениях параметра *p* решить уравнение

$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$.

Решение

Область допустимых значений: $x^2 - 1 \geq 0$, $x^2 - p \geq 0$.

Так как левая часть уравнения неотрицательна, $x \geq 0$.

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$x^2 - p + 4(x^2 - 1) + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = x^2,$$

$$4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = 4 + p - 4x^2.$$

Опять возведём в квадрат:

$$16\left(x^4-(p+1)x^2+p\right)=(p+4)^2+16x^4-8(p+4)x^2,$$

$$16p-p^2-8p-16=8(p-2)x^2,$$

$$x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}.$$

Равенство возможно только при p<2, $x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.

Проверка. $x^2-p=\frac{(p-4)^2-8p(2-p)}{8(2-p)}=\frac{9p^2-24p+16}{8(2-p)}=\frac{(3p-4)^2}{8(2-p)}\geq 0,$

$$x^2-1=\frac{(p-4)^2-8(2-p)}{8(2-p)}=\frac{p^2}{8(2-p)}\geq 0,$$

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=\frac{|3p-4|}{\sqrt{8(2-p)}}+\frac{2|p|}{\sqrt{8(2-p)}}=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}},$$

$$|3p-4|+2|p|=4-p.$$

При $p\leq 0$ получаем $4-3p-2p=4-p$, $5p=p$, p=0.

Если 0<p<4/3, то $4-3p+2p=4-p$, 0=0.

Наконец, при $4/3\leq p<2$ имеем $3p-4+2p=4-p$, $6p=8$, p=4/3.

Замечание. Можно было не подставлять полученный корень в уравнение, а проверить условие $4+p-4x^2\geq 0$, которое обеспечивает эквивалентность преобразований при втором возведении в квадрат.

Ответ: при $0\leq p\leq 4/3$ $x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$, при других p решений нет.

Задача 5

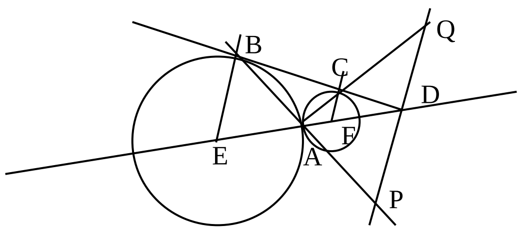
Две окружности касаются в точке *A*, *BC* – общая касательная, пересекающая линии центров в точке *D*. Через точку *D* проведена прямая, перпендикулярная к *BC*. Прямые *BA* и *AC* пересекают эту прямую в точках *P* и *Q*. В каком отношении точка *D* делит отрезок *PQ*?

Решение

Пусть *E* и *F* – центры окружностей. Так как *EB* и *FC* перпендикулярны *BC* (радиусы, проведённые в точки касания), *EB*||*FC*||*PQ*. Углы *EBA* и *APD* равны как внутренние накрест лежащие, углы *BAE* и *DAP* вертикальные. Так как *EB*=*EA*, угол *EBA* равен углу *BAE*, угол *APD* равен углу *DAP*. Таким образом, треугольник *DAP* равнобедренный,

$PD=AD$. Далее, углы AFC и ADQ равны как соответственные, треугольники AFC и ADQ подобны по двум углам, следовательно, $QD=AD$.

Таким образом, $QD=PD$, то есть $PD:DQ=1:1$.



Ответ: $PD:DQ=1:1$.