Задание № 5

Задача 1

Сплав состоит из стали и никеля, массы которых относятся как 9 к 2. Сколько никеля входит в сплав, если масса сплава равна 748 г?

Решение

1 способ. Так как массы стали и никеля в сплаве относятся как 9 к 2, то масса никеля в сплаве составляет 2 части, а масса стали – 9 частей. Всего получаем $9 + 2 = 11$ (частей) металла в сплаве. Найдем массу одной части: $748 : 11 = 68$ (г). Тогда масса никеля в сплаве равна $2\cdot 68 = 136$ (г).

2 способ. Пусть масса никеля в сплаве равна x г, тогда масса стали в сплаве равна $(748 – x)$ г. Так как массы стали и никеля относятся как 9 к 2, то получаем уравнение:

$$\frac{748-x}{x}=\frac{9}{2}.$$

Воспользуемся для решения уравнения основным свойством пропорции:

$$2\cdot(748 – x) = 9x;$$

$$1496 – 2x = 9x;$$

$$11x = 1496;$$

$$x = 136.$$

Ответ. Масса никеля в сплаве рана 136 грамм.

Задача 2

Для каждого значения параметра a решите уравнение $\left(x^2-ax-a-1\right)\cdot\left(x+2a\right)=0.$

Решение

Разложим сначала выражение $x^2 – ax – a – 1$ на множители:

$x^2 - ax - a - 1 = (x^2 - 1) - (ax + a) = (x - 1)\cdot(x + 1) - a\cdot(x + 1) = (x + 1)\cdot(x - 1 - a)$.

Тогда уравнение примет вид:

$$(x + 1)\cdot(x - 1 - a)\cdot(x + 2a) = 0.$$

Произведение равно нулю когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные имеют смысл. Так как каждый из множителей имеет смысл при любых значениях входящих в него переменной х и параметра а, то получаем:

$x + 1 = 0$ или $x - 1 - a = 0$ или $x + 2a = 0$;

$x = -1.$ $x = 1 + a.$ $x = -2a.$

Выясним, при каких значениях параметра a корни уравнения будут совпадать.

1) $-1 = 1 + a,$ $a = -2.$ При $a = -2$ $-2a = -2\cdot(-2) = 4,$ $4 \neq -1,$ следовательно, при $a = -2$ уравнение имеет два различных корня.

2) $-1 = -2a,$ $a = 0{,}5.$ При $a = 0{,}5$ $1 + a = 1 + 0{,}5 = 1{,}5;$ $1{,}5 \neq -1,$ следовательно, при $a = 0{,}5$ уравнение имеет два различных корня.

3) $1 + a = -2a,$ $3a = -1,$ $a = -\frac{1}{3}.$ При $a = -\frac{1}{3}$ $1 + a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$ $\frac{2}{3} \neq -1,$ следовательно, при $a = -\frac{1}{3}$ уравнение имеет два различных корня.

Ответ. При $a = -2$ $x_1 = -1;$ $x_2 = 4;$

при $a = 0{,}5$ $x_1 = -1;$ $x_2 = 1{,}5;$

при $a = -\frac{1}{3}$ $x_1 = -1;$ $x_2 = \frac{2}{3};$

при $a \neq -2,$ $a \neq 0{,}5$ и $a \neq -\frac{1}{3}$ $x_1 = -1,$ $x_2 = 1 + a,$ $x_3 = -2a.$

Задача 3

Упростите выражение $\frac{a^2}{(a+1)(a-c)} + \frac{1}{(a+1)(c+1)} + \frac{c^2}{(c-a)(c+1)}.$

Решение

$$\frac{a^2}{(a+1)(a-c)} + \frac{1}{(a+1)(c+1)} + \frac{c^2}{(c-a)(c+1)} = \frac{a^2}{(a+1)(a-c)} - \frac{c^2}{(a-c)(c+1)} + \frac{1}{(a+1)(c+1)} =$$

$$=\frac{a^2(c+1)-c^2(a+1)}{(a+1)(a-c)(c+1)}+\frac{1}{(a+1)(c+1)}=\frac{a^2c+a^2-c^2a-c^2}{(a+1)(a-c)(c+1)}+\frac{1}{(a+1)(c+1)}=$$

$$=\frac{\left(a^2c-c^2a\right)+\left(a^2-c^2\right)}{(a+1)(a-c)(c+1)}+\frac{1}{(a+1)(c+1)}=\frac{ac(a-c)+(a-c)(a+c)}{(a+1)(a-c)(c+1)}+\frac{1}{(a+1)(c+1)}=$$

$$=\frac{(a-c)(ac+a+c)}{(a+1)(a-c)(c+1)}+\frac{1}{(a+1)(c+1)}=\frac{ac+a+c}{(a+1)(c+1)}+\frac{1}{(a+1)(c+1)}=\frac{ac+a+c+1}{(a+1)(c+1)}=$$

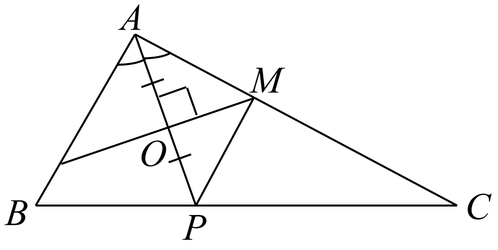
$$=\frac{(ac+a)+(c+1)}{(a+1)(c+1)}=\frac{a(c+1)+(c+1)}{(a+1)(c+1)}=\frac{(a+1)(c+1)}{(a+1)(c+1)}=1.$$

Ответ. 1.

Задача 4

Прямая, проходящая через середину биссектрисы AP треугольника ABC и перпендикулярная к AP, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MP \parallel AB$.

Решение



Пусть O – середина биссектрисы AP.

Рассмотрим ΔAMP. Так как $MO \perp AP$, то MO – медиана и высота ΔAMP, следовательно, ΔAMP – равнобедренный с основанием AP (по признаку равнобедренного треугольника), значит, $\angle PAM = \angle APM$ как углы при основании равнобедренного треугольника (по свойству равнобедренного треугольника).

По условию задачи AP – биссектриса ΔABC, значит $\angle BAP = \angle PAC$ (по определению биссектрисы треугольника). Так как $\angle BAP = \angle PAC$ и $\angle PAC = \angle APM$, то $\angle BAP = \angle APM$.

$\angle BAP = \angle APM$ – накрест лежащие, образованные при пересечении прямых AB и MP секущей AP, следовательно, $AB \parallel MP$ (по признаку параллельности прямых), что и требовалось доказать.

Задача 5

Двое играющих называют числа: первый называет натуральное число, не больше пяти; второй прибавляет к этому числу также натуральное число, не больше пяти, и называет полученную сумму. Затем первый снова прибавляет не более пяти и т.д. Выигрывает тот, кто первый назовет 100. Как должен играть первый играющий, чтобы выиграть?

Решение

По условию задачи каждый из игроков в каждый свой ход увеличивает сумму, названную другим игроков в предыдущий ход, на натуральное число, заключенное между 1 и 5. Таким образом, не зависимо от хода второго игрока, первый игрок на каждом своем ходу может увеличить сумму, названную им самим в предыдущий свой ход на 6:

– если второй игрок увеличил предыдущую сумму первого игрока на 1, то первый увеличивает сумму, названную втором игроком на 5;

– если второй игрок увеличил предыдущую сумму первого игрока на 2, то первый увеличивает сумму, названную втором игроком на 5;

– если второй игрок увеличил предыдущую сумму первого игрока на 3, то первый увеличивает сумму, названную втором игроком на 3;

– если второй игрок увеличил предыдущую сумму первого игрока на 4, то первый увеличивает сумму, названную втором игроком на 2;

– если второй игрок увеличил предыдущую сумму первого игрока на 5, то первый увеличивает сумму, названную втором игроком на 1.

Разделим число 100 на 6 с остатком: $100 = 6 \cdot 16 + 4$.

Таким образом, для того, чтобы выиграть, первый игрок первым своим ходом должен назвать число 4, а каждым следующим ходом должен увеличивать сумму, названную им самим в предыдущий ход, на 6. Тогда числа, названные первым игроком, будут равны 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, 76, 82, 88, 94, 100. После того, как первый игрок назвал 94, какое бы число от 1 до 5 не прибавил к этой сумме второй игрок, он не сможет назвать число 100, однако названная им сумма будет меньше 100 на число от 1 до 5 и следующим ходом первый игрок называет число 100.

Ответ. Первый игрок первым своим ходом должен назвать число 4, а каждым следующим ходом должен увеличивать сумму, названную им самим в предыдущий ход, на 6.