

Задание 2

Задача 1

Сумма первых 11 членов арифметической прогрессии больше 203, но меньше 217. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Пятый член равен 16. Найти сумму первых пятидесяти членов этой прогрессии.

Решение

Пусть a – первый член прогрессии, d – её разность.

$$S_{11} = 11 \cdot \frac{2a + 10d}{2} = 11(a + 5d), \quad a_5 = a + 4d.$$

По условию, $a + 4d = 16$, $203 < 11(a + 5d) < 217$.

Получаем $18\frac{5}{11} < a + 5d = 19\frac{8}{11}$, то есть $a + 5d = 19$.

Таким образом находим, $d=3$, $a=4$,

$$S_{50} = 50 \cdot \frac{2a + 49d}{2} = 25(2a + 49d) = 3875.$$

Ответ: 3875.

Задача 2

Для вспашки трёх одинаковых полей выделено три трактора различной производительности. Каждое поле вспахивается одним трактором. Первый трактор начал работу на полчаса раньше второго, а третий – на $\frac{1}{3}$ часа позже второго. Вспашка полей велась тракторами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьего трактора оказалось, что к этому моменту каждый из тракторов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы второго трактора закончил работу первый, если третий выполнил всю работу на 12 минут раньше, чем второй?

Решение

Пусть первый тракторист закончил работу через x минут после второго. Тогда, если третий тракторист работал y минут, то второй работал $y+20+12=y+32$ минуты, а первый – $y+62+x$ минут. Предположим, одинаковая часть работы была выполнена через z минут после начала работы третьего тракториста. Тогда

$$\frac{z}{y} = \frac{z+20}{y+32} = \frac{z+50}{y+x+62}.$$

Из первого равенства получаем

$$32z=20y, \quad y=1,6z,$$

тогда

$$\frac{5}{8} = \frac{z+50}{1,6z+x+62}, \quad 5x = 50 \cdot 8 - 62 \cdot 5 = 90, \quad x=18.$$

Ответ: 18 минут.

Задача 3

Найти все значения a , при каждом из которых существует хотя бы одно решение системы неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - 8y^2 \geq 2 \\ x^2 - 4xy + 2y^2 \leq \frac{2a+1}{4a} \end{cases}$$

Решение

Умножим первое неравенство на -1 , второе – на 4 и сложим:

$$\begin{cases} -3x^2 + 8xy + 8y^2 \leq -2 \\ 4x^2 - 16xy + 8y^2 \leq \frac{2a+1}{a} \end{cases}$$

$$x^2 - 8xy + 16y^2 \leq \frac{1}{a}, (x - 4y)^2 \leq \frac{1}{a}.$$

Таким образом, система может иметь решения только при $a > 0$.

Пусть $a > 0$. В качестве примера укажем решение системы неравенств, при котором неравенства обращаются в равенства.

Если $x = 4y + 1/\sqrt{a}$, то подставляя в систему, получим

$$8y^2 + \frac{3-2a}{a} + \frac{16y}{\sqrt{a}} = 0, y = \frac{-4 \pm \sqrt{4a+10}}{4\sqrt{a}}.$$

Если $x = 4y - 1/\sqrt{a}$,

$$8y^2 + \frac{3-2a}{a} - \frac{16y}{\sqrt{a}} = 0, y = \frac{4 \pm \sqrt{4a+10}}{4\sqrt{a}}.$$

Ответ: $a > 0$.

Задача 4

Числа x и y таковы, что

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 16x - 10y + 89} + \sqrt{x^2 + y^2 + 14x - 2y + 50} = \sqrt{17}.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2$?

Решение

Выделяя полные квадраты, получаем

$$\sqrt{(x+8)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x+7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{17}.$$

Рассмотрим на плоскости точки $M(x,y)$, $A(-8,5)$, $B(-7,1)$. Тогда равенство означает, что $|AM| + |BM| = |AB|$, то есть точка M лежит на отрезке AB . Выражение $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение для наиболее удаленной от начала координат точки отрезка AB , это либо точка A , либо точка B .

Вычисляем: $|OA|^2 = 89$, $|OB|^2 = 50$. Таким образом, наибольшее значение выражения $x^2 + y^2$ равно 89.

Ответ: 89.

Задача 5

Дан прямоугольный треугольник с катетами a и b ($\angle B = 90^\circ$). Найдите множество точек M , для которых $MA^2 - MC^2 = 2MB^2$.

Решение

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке B и осями, проходящими через точки A и C , то есть точка A имеет координаты $(0,a)$, а точка C - координаты $(b,0)$.

Пусть точка M имеет координаты (x,y) . Тогда

$$x^2 + (y-a)^2 - (x-b)^2 - y^2 = 2(x^2 + y^2),$$

$$x^2 + y^2 - bx + b^2/2 + ay - a^2/2 = 0,$$

$$(x - b/2)^2 + (y + a/2)^2 = (-b^2 + 3a^2)/4.$$

При $b^2 < 3a^2$ это уравнение окружности с центром в точке $(b/2, -a/2)$ и радиусом $\sqrt{-b^2 + 3a^2}/2$, при $b^2 = 3a^2$ точка $(b/2, -a/2)$, при $b^2 > 3a^2$ искомое множество пусто.