

Задача 1**Задание № 5****Задача 1**

Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок в выражении $(1 + 4x - 4x^2)^{175} \cdot (1 + 2x)^5 \cdot (1 - 3x + x^2 + 2x^3)^{149}$.

Решение

Обозначим, $P(x) = (1 + 4x - 4x^2)^{175} \cdot (1 + 2x)^5 \cdot (1 - 3x + x^2 + 2x^3)^{149}$. Так как сумма коэффициентов многочлена стандартного вида от одной переменной равна значению этого многочлена в точке 1, то сумма коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок в выражении $(1 + 4x - 4x^2)^{175} \cdot (1 + 2x)^5 \cdot (1 - 3x + x^2 + 2x^3)^{149}$, равна значению многочлена $P(x)$ при $x = 1$, то есть $P(1)$. $P(1) = 1^{175} \cdot 3^5 \cdot 1^{149} = 243$.

Ответ. 243.

Задача 2

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\frac{ax^2 - 2(a+3)x + 4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 0$ имеет один действительный корень.

Решение

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} ax^2 - 2(a+3)x + 4a = 0, \\ x^2 - (a+2)x + 2a \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение в системе является квадратным уравнением с параметром.

Чтобы уравнение $\frac{ax^2 - 2(a+3)x + 4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 0$ имело один действительный корень,

система должна иметь единственное решение. Система может иметь единственное решение в двух случаях:

– первое уравнение системы имеет единственное решение, которое удовлетворяет второму неравенству системы;

– первое уравнение системы имеет два различных действительных корня, один из которых удовлетворяет второму неравенству системы, а другой не удовлетворяет второму неравенству системы.

Рассмотрим каждый из этих двух случаев.

1) Уравнение $ax^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ может иметь один корень в двух случаях:

1.1) $a = 0$. При $a = 0$ система примет вид:

$$\begin{cases} -6x = 0, \\ x^2 - 2x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x(x - 2) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ 0 \neq 0. \end{cases}$$

Система решений не имеет, следовательно, при $a = 0$ уравнение

$$\frac{ax^2 - 2(a+3)x + 4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 0 \text{ решений не имеет.}$$

$$\begin{aligned} 1.2) \quad D = 0. \quad \frac{1}{4}D &= (a+3)^2 - 4a^2 = (a+3-2a)(a+3+2a) = (3-a)(3a+3) = \\ &= 3(3-a)(a+1). \quad D = 0 \text{ при } a = 3 \text{ или } a = -1. \end{aligned}$$

При $a = 3$ система примет вид:

$$\begin{cases} 3x^2 - 12x + 12 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ (x-2)(x-3) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0, \\ (x-2)(x-3) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ 0 \neq 0. \end{cases}$$

Система решений не имеет, следовательно, при $a = 3$ уравнение

$$\frac{ax^2 - 2(a+3)x + 4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 0 \text{ решений не имеет.}$$

При $a = -1$ система примет вид:

$$\begin{cases} -x^2 - 4x - 4 = 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0, \\ (x-2)(x+1) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 = 0, \\ (x-2)(x+1) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ 4 \neq 0; \end{cases}$$

$$x = -2.$$

Система имеет единственное решение, следовательно, при $a = -1$

$$\text{уравнение } \frac{ax^2 - 2(a+3)x + 4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 0 \text{ имеет единственное решение.}$$

2) Уравнение $ax^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ имеет два различных действительных корня, если

$$\begin{cases} D > 0, \\ a \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(3-a)(a+1) > 0, \\ a \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < a < 3, \\ a \neq 0; \end{cases}$$

$$-1 < a < 0, 0 < a < 3.$$

Найдем, при каких значениях x знаменатель дроби $x^2 - (a+2)x + 2a$ обращается в ноль.

$$x^2 - (a+2)x + 2a = 0;$$

$$(x - 2)(x - a) = 0;$$

$$x = 2 \text{ или } x = a.$$

Выясним, при каких значениях a $x = 2$ является корнем уравнения $ax^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$:

$$a \cdot 2^2 - 2(a + 3) \cdot 2 + 4a = 0;$$

$$4a - 4a - 12 + 4a = 0;$$

$$4a - 12 = 0;$$

$$a = 3.$$

$a = 3$ не удовлетворяет условию $-1 < a < 0$, $0 < a < 3$, следовательно, если уравнение $ax^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ имеет два различных действительных корня, то ни один из этих корней не равен 2.

Выясним, при каких значениях a $x = a$ является корнем уравнения $ax^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$:

$$a \cdot a^2 - 2(a + 3) \cdot a + 4a = 0;$$

$$a^3 - 2a^2 - 6a + 4a = 0;$$

$$a^3 - 2a^2 - 2a = 0;$$

$$a(a^2 - 2a - 2) = 0;$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1 \pm \sqrt{3}.$$

$a = 0$ не удовлетворяет условию $-1 < a < 0$, $0 < a < 3$. Так как $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, то $2,7 < 1 + \sqrt{3} < 2,8$, а $-0,8 < 1 - \sqrt{3} < -0,7$, следовательно, $a = 1 \pm \sqrt{3}$ удовлетворяют условию $-1 < a < 0$, $0 < a < 3$, то есть при $a = 1 \pm \sqrt{3}$ один из двух действительных корней уравнения $ax^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ равен a , а значит, не является корнем уравнения $\frac{ax^2 - 2(a+3)x + 4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 0$. Таким образом, при

$a = 1 \pm \sqrt{3}$ уравнение $\frac{ax^2 - 2(a+3)x + 4a}{x^2 - (a+2)x + 2a} = 0$ имеет один действительный корень.

Ответ. $a = -1$, $a = 1 \pm \sqrt{3}$.

Задача 3

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$.

Решение

Решение любой задачи, связанной с исследованием функции, начинают с нахождения области определения рассматриваемой функции. Найдем область определения функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$. Числитель и знаменатель дроби

существуют для любого действительного значения x , следовательно, область определения функции определяется следующим условием: $x(x-3)+5 \neq 0$.

Решим квадратное уравнение $x^2 - 3x + 5 = 0$. $D = 9 - 20 = -16 < 0$, следовательно, квадратное уравнение $x^2 - 3x + 5 = 0$ действительных корней не имеет, а так как старший коэффициент квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 5$ положителен, то для любого действительного значения x $x^2 - 3x + 5 > 0$. Таким образом, получили, что область определения функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ совпадает

со всем множеством действительных чисел.

1 способ. Преобразуем функцию, выделив у дроби целую часть:

$$\frac{x(x-3)}{x(x-3)+5} = \frac{(x(x-3)+5)-5}{x(x-3)+5} = 1 - \frac{5}{x(x-3)+5} = 1 - \frac{5}{x^2 - 3x + 5}. \quad \text{Таким образом,}$$

$y = 1 - \frac{5}{x^2 - 3x + 5}$. Выделим у квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 5$ полный квадрат:

$$x^2 - 3x + 5 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 5 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 5 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{11}{4}. \quad \text{Так как}$$

квадрат любого действительного числа неотрицателен, то

$$x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}, \quad \text{следовательно, в силу того, что функция } y = \frac{1}{t}$$

убывает на интервале $(0; +\infty)$, $\frac{1}{x^2 - 3x + 5} \leq \frac{1}{\frac{11}{4}} = \frac{4}{11}$, тогда $\frac{5}{x^2 - 3x + 5} \leq 5 \cdot \frac{4}{11} = \frac{20}{11}$.

Умножая последнее неравенство на -1 , получим $-\frac{5}{x^2 - 3x + 5} \geq -\frac{20}{11}$, прибавив к обеим частям этого неравенства 1 , окончательно получаем

$1 - \frac{5}{x^2 - 3x + 5} \geq 1 - \frac{20}{11} = -\frac{9}{11}$, то есть $y = 1 - \frac{5}{x^2 - 3x + 5} \geq -\frac{9}{11}$, значит, наименьшее значение функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ равно $-\frac{9}{11}$.

2 способ. Действительное число y принадлежит множеству значений функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ тогда и только тогда, когда при данном конкретном

значении y уравнение $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ будет иметь хотя бы один действительный

корень x . Найдем множество значений функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$, решив

следующую задачу с параметром: найти все значения параметра y , при которых

уравнение $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ имеет хотя бы один действительный корень. Так как

знаменатель правой части уравнения ни при каком действительном значении x в

ноль не обращается, то умножим обе части уравнения $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ на

$x(x-3)+5$, получим:

$$y \cdot (x(x-3)+5) = x(x-3).$$

Преобразуем это уравнение к квадратному уравнению с параметром y :

$$y \cdot (x^2 - 3x + 5) = x^2 - 3x;$$

$$yx^2 - 3yx + 5y - x^2 + 3x = 0;$$

$$(y-1)x^2 - 3(y-1)x + 5y = 0.$$

Если $y = 1$, то уравнение примет вид неверного числового равенства $5 = 0$, следовательно, при $y = 1$ уравнение $(y-1)x^2 - 3(y-1)x + 5y = 0$ действительных корней не имеет.

Если $y \neq 1$, то уравнение $(y-1)x^2 - 3(y-1)x + 5y = 0$ является квадратным и будет иметь хотя бы один действительный корень x тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена $(y-1)x^2 - 3(y-1)x + 5y$ неотрицателен.

Найдем дискриминант $(y-1)x^2 - 3(y-1)x + 5y$:

$$D = 9(y-1)^2 - 20y(y-1) = (y-1)(9y-9-20y) = -(y-1)(11y+9).$$

Множество значений функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ совпадает со множеством

решений системы неравенств: $\begin{cases} y \neq 1, \\ -(y-1)(11y+9) \geq 0. \end{cases}$ Решим эту систему

неравенств.

$$\begin{cases} y \neq 1, \\ -(y-1)(11y+9) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 1, \\ (y-1)(11y+9) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 1, \\ -\frac{9}{11} \leq y \leq 1; \end{cases}$$

$$-\frac{9}{11} \leq y < 1.$$

Таким образом, множеством значений функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ является

полуинтервал $\left[-\frac{9}{11}; 1\right)$, а наименьшее значение функции $y = \frac{x(x-3)}{x(x-3)+5}$ равно

$$-\frac{9}{11}.$$

Ответ. $-\frac{9}{11}.$

Задача 4

Точка O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Точка M – середина стороны AC . Угол AOC равен 135° .

а) Докажите, что угол ABC прямой.

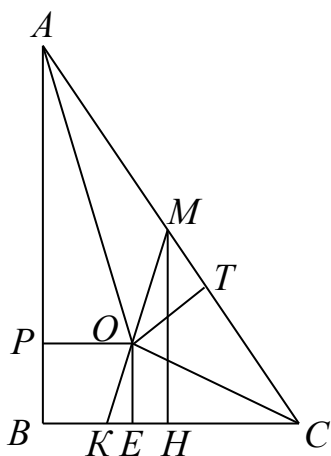
б) Прямые MO и BC пересекаются в точке K .

Найдите отношение $BK : KC$, если $AB = 15$, $BC = 8$.

Решение

а) Так как O – точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$, то

$\angle BAO = \angle OAC = 0,5\angle BAC$, $\angle BCO = \angle OCA = 0,5\angle BCA$.



В $\triangle AOC$ по теореме о сумме углов треугольника $\angle OAC + \angle OCA + \angle AOC = 180^\circ$, а по условию задачи $\angle AOC = 135^\circ$, следовательно, $\angle OAC + \angle OCA = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, тогда $\angle BAC + \angle BCA = 2\angle OAC + 2\angle OCA = 2(\angle OAC + \angle OCA) = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

В $\triangle ABC$ по теореме о сумме углов треугольника $\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ$, тогда $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

б) Так как O – точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$, то O – центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Обозначим, P , E и T – точки касания вписанной в $\triangle ABC$ окружности со сторонами AB , BC и AC соответственно. Тогда $OP = OE = OT = r$. По свойству радиуса окружности, проведенного в точку касания, $OE \perp CB$, $OP \perp AB$, $OT \perp AC$. По свойству отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки, $AP = AT$, $BP = BE$, $CE = CT$.

Рассмотрим $\triangle ABC$. По доказанному в п. а) $\angle ABC = 90^\circ$. По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2$, значит, $AC = 17$.

Рассмотрим четырехугольник $BPOE$. Так как $\angle ABC = 90^\circ$, то $AB \perp BC$. Так как $AB \perp BC$, $OE \perp CB$, $OP \perp AB$, то $AB \parallel OE$, $CB \parallel OP$, следовательно, $BPOE$ – параллелограмм (по определению), а так как $\angle PBE = 90^\circ$ и $OP = OE$, то $BPOE$ – квадрат, значит, $BP = BE = OP = OE = r$.

Найдем радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

1 способ. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} (AB + BC + AC) \cdot r$, следовательно, $r = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC + AC} = \frac{15 \cdot 8}{15 + 8 + 17} = \frac{15 \cdot 8}{40} = \frac{15}{5} = 3$.

2 способ. Так как $AP = AT$, $BP = BE = r$, $CE = CT$, то $AB + BC = AP + PB + CE + EB = AT + r + CT + r = AC + 2r$, значит, $r = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{15 + 8 - 17}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Проведем $MH \perp BC$, $H \in BC$. Так как $AB \perp BC$ и $MH \perp BC$, то $AB \parallel MH$. Кроме того, по условию задачи M – середина AC , следовательно, MH – средняя

линия $\triangle ABC$ (по признаку), значит, $MH = \frac{1}{2}AB = 7,5$; $BH = HC = \frac{1}{2}BC = 4$. $EH = BH - BE = 4 - 3 = 1$.

Рассмотрим $\triangle OKE$ и $\triangle MKN$. Так как $MH \perp BC$ и $OE \perp CB$, то $\angle OEK = \angle MNK = 90^\circ$, $\angle MKN$ – общий, значит, $\triangle OKE \sim \triangle MKN$ (по двум углам), следовательно, $\frac{OE}{MH} = \frac{KE}{KN}$, $\frac{OE}{MH} = \frac{KE}{KE + EH}$, $\frac{3}{7,5} = \frac{KE}{KE + 1}$, $3(KE + 1) = 7,5KE$; $4,5KE = 3$; $KE = \frac{3}{4,5} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$. Тогда $BK = BE - EK = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$, $CK = BC - BK = 8 - \frac{7}{3} = \frac{17}{3}$, следовательно, $\frac{BK}{KC} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{17}{3}} = \frac{7}{17}$.

Ответ. $BK : KC = 7 : 17$.

Задача 5

В отчете о лыжном забеге сообщалось, что 69% его участников выполнили норму ГТО (это число дано с точностью 0,5%). Мастер спорта, стартовавший в этом забеге предпоследним, обогнал на дистанции 58 участников, а сам ни разу не уступал лыжню. Поэтому он решил, что обогнал всех. Докажите, что он ошибся.

Решение

Пусть мастер спорта не ошибся, тогда число участников лыжного забега равно $58 + 1 + 1 = 60$. Пусть m участников лыжного забега выполнили норму ГТО, тогда норму ГТО выполнили $\frac{m}{60} \cdot 100\% = \frac{5m}{3}\%$ от общего числа участников лыжного забега. По условию задачи норму ГТО с точностью до 0,5% выполнили 69% участников лыжного забега, то есть

$$68,5 \leq \frac{5m}{3} \leq 69,5;$$

$$205,5 \leq 5m \leq 208,5;$$

$$41,1 \leq m \leq 41,7.$$

По условию задачи m – число натуральное, а неравенство $41,1 \leq m \leq 41,7$ решений в натуральных числах не имеет, следовательно, наше предположение не верно, мастер спорта ошибся.