

Задание 5

Задача 1

20 человек случайным образом садятся за стол. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом, если стол а) круглый; б) прямоугольный и все сидят по одну его сторону; в) прямоугольный и рассаживаются по 10 с каждой стороны.

Решение

Используем классическое определение вероятности. Количество всех исходов равно $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 1 = 20!$ (одно из 20 мест может занять первый человек, второй – одно из 19 оставшихся и так далее).

Если стол круглый, каждому из 20 возможных мест посадки первого человека соответствует 2 места для размещения второго (справа и слева), таким образом, количество благоприятствующих исходов $20 \cdot 2 \cdot 18!$ и вероятность равна $2/19$.

Пусть стол прямоугольный и все сидят по одну сторону. Если первый садится на одно из двух крайних мест, у второго есть одна возможность сесть рядом, если первый садится на одно из оставшихся 18 мест, у второго есть две возможности сесть рядом. Таким образом, количество исходов, благоприятствующих событию, равно $(2 + 18 \cdot 2) \cdot 18! = 19! \cdot 2$ и вероятность равна $2/20 = 1/10$.

Аналогично в случае в) количество благоприятствующих исходов $(4 + 16 \cdot 2) \cdot 18! = 18! \cdot 18 \cdot 2$, вероятность равна $18/190 = 9/95$.

Ответ: а) $2/19$, б) $0,1$, в) $9/95$.

Задача 2

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

Решение

Пусть S – размер кредита, A – величина ежегодной выплаты. Обозначим также $t = 1 + \frac{r}{100}$.

Через год размер долга составит $St - A$, через два года $(St - A)t - A = St^2 - At - A$,

через три $(St^2 - At - A)t - A = St^3 - At^2 - At - A$, через четыре $St^4 - At^3 - At^2 - At - A$.

Пусть $A_1 = 106964$, $A_2 = 58564$. Тогда по условию задачи

$$St^2 - A_1t - A_1 = 0,$$

$$St^4 - A_2t^3 - A_2t^2 - A_2t - A_2 = 0.$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$t^2 = \frac{A_2(t^3 + t^2 + t + 1)}{A_1(t + 1)} = \frac{A_2(t^4 - 1)}{A_1(t + 1)(t - 1)} = \frac{A_2}{A_1}(t^2 + 1),$$

$$t^2 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) = \frac{A_2}{A_1}, \quad t^2 = \frac{A_2}{A_1 - A_2} = \frac{58564}{106964 - 58564} = \frac{58564}{48400} = 1,21, \quad t = 1,1, \quad r = 10.$$

Ответ: 10.

Задача 3

Решите уравнение

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = x$$

$$1 + \frac{1}{x}$$

(знак дроби повторяется n раз).

Решение

При $n=1$ получаем уравнение

$$1 + \frac{1}{x} = x, (*)$$

при $n=2$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = x, \quad 1 + \frac{1}{x} + 1 = x + 1, \quad 1 + \frac{1}{x} = x.$$

Пусть теперь при произвольном n число x – корень уравнения (*). Постепенно упрощая дробь в левой части исходного равенства, получаем

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \dots = 1 + \frac{1}{x} = x$$

$$\begin{array}{ccc} (n \text{ знаков дроби}) & & (n-1 \text{ знак дроби}) \end{array}$$

Таким образом, корни уравнения (*) являются корнями исходного уравнения,

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Докажем, что других решений нет.

Будем опять упрощать дробь в левой части уравнения, двигаясь снизу вверх.

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}, \quad 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}, \dots$$

В результате придём к уравнению

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x, \quad cx^2 + (d-a)x - b = 0,$$

то есть исходное уравнение имеет не более двух корней, а два его корня мы уже нашли.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Задача 4

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 31 + 2x - 4y \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

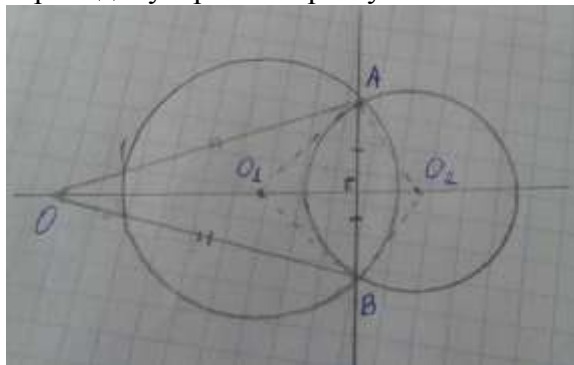
Решение

Выделяя полные квадраты, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 36 \\ (x+6-a)^2 + (y-a)^2 = 9 \end{cases}.$$

Таким образом, решения системы – это точки пересечения окружности радиуса 6 с центром $O_1(1, -2)$ и окружности радиуса 3 с центром $O_2(a-6, a)$.

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ – искомые точки. Тогда прямая O_1O_2 является серединным перпендикуляром к отрезку AB .



По условию получаем

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (y_2 - y_1)(y_2 + y_1), \quad x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2, \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

то есть точки A и B равноудалены от начала координат.

Таким образом, треугольник OAB равнобедренный, точка $O(0,0)$ лежит на прямой O_1O_2 :

$$\frac{a-6}{a} = \frac{1}{-2}, \quad 12-2a = a, \quad a = 4.$$

Итак, условия задачи могут быть выполнены только при $a = 4$. Пусть $a = 4$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 31 + 2x - 4y \\ x^2 + 4x + y^2 = 8y - 11 \end{cases},$$

$$31 + 2x - 4y = 8y - 4x - 11,$$

$$x = 2y - 7,$$

$$(2y-7)^2 + y^2 = 31 + 2(2y-7) - 4y,$$

$$5y^2 - 28y + 32 = 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 8/5; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -19/5.$$

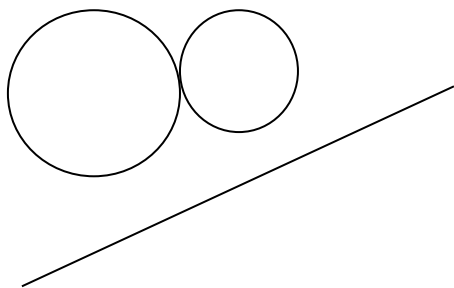
Проверим выполнение условия задачи:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{24/5}{-12/5} = -2, \quad \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{28/5}{-14/5} = -2.$$

Ответ: 4.

Задача 5

Две окружности касаются внешним образом. Провести прямую, параллельную данной и отсекающую от окружностей хорды равной длины.



Решение

Опустим из центров окружностей перпендикуляры O_1E и O_2F на прямую. Осуществим параллельный перенос меньшей окружности на вектор EF . Получим окружность с центром O_3 , пересекающую большую окружность в точках A и B .

Так как треугольники AO_2O_3 и BO_2O_3 равны по трём сторонам, прямая O_2F перпендикулярна прямой AB . Таким образом, прямая AB параллельна исходной прямой. Хорды AB и A_1B_1 равны, поскольку проведены на равном расстоянии от центров равных окружностей.

