8 класс

Задание № 1.

Задача 1

Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел оканчиваться на 2019? Ответ обосновать.

Решение

1 способ. Покажем сначала, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5. Пусть первое число x, тогда четыре последующих – $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ и $x + 4$. Найдем их сумму

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 5x + 10 = 5(x + 2),$$

а $5(x + 2)$ делится на 5.

Рассмотрим сумму n натуральных чисел. Разделим n на 5 с остатком, то есть запишем n в виде $n = 5p + r$, где p – целое неотрицательное число, а r – остаток от деления n на 5, r принимает одно из значений: 0, 1, 2, 3 или 4.

Если $r = 0$, то есть $n = 5p$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно разбить на p групп из 5 последовательных натуральных чисел. Сумма чисел в каждой группе делится на 5, следовательно, $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ делится на 5, то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 5p = 5a$.

Если $r = 1$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) = 5a + 5p + 1 = 5(a + p) + 1,$$

то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ при делении на 5 имеет остаток 1.

Если $r = 2$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) + (5p + 2) =$$

$$= 5a + 5p + 1 + 5p + 2 = 5(a + 2p) + 3,$$

то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ при делении на 5 имеет остаток 3.

Если $r = 3$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) + (5p + 2) + (5p + 3) =$$
$$= 5a + 5p + 1 + 5p + 2 + 5p + 3 = 5(a + 3p + 1) + 1,$$
то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ при делении на 5 имеет остаток 1.

Если $r = 4$, то сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно представить в виде
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + 2 + 3 + \ldots + 5p) + (5p + 1) + (5p + 2) + (5p + 3) + (5p + 4) =$$
$$= 5a + 5p + 1 + 5p + 2 + 5p + 3 + 5p + 4 = 5(a + 4p + 2),$$
то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ делится на 5.

Таким образом, сумма первых нескольких натуральных чисел делится на 5 или при делении на 5 имеет остаток 1 или 3. А натуральное число, оканчивающееся на 2019, при делении на 5 имеет остаток 4, так как остаток от деления на 5 натурального числа совпадает с остатком от деления на 5 его последней цифры. Значит, сумма первых нескольких натуральных чисел не может оканчиваться на 2019.

2 способ. Выведем сначала формулу для вычисления суммы n первых натуральных чисел. Пусть $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$. Запишем ту же сумму, но слагаемые в ней запишем в обратном порядке, получим, $S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1$. Сложим оба получившихся равенства, причем, слагаемые в правых частях сложим почленно, то есть первое с первым, второе со вторым и т.д. Получим:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n \\ S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1 \end{array} \\ \hline 2S_n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1) \end{array}$$

В правой части равенства получили n одинаковых слагаемых, каждое из которых равно $n + 1$, следовательно, $2S_n = n\cdot(n + 1)$, откуда окончательно получаем формулу $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Предположим, что сумма первых нескольких натуральных чисел оканчивается на 2019, то есть $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \ldots 2019$, следовательно, учитывая установленную выше формулу, имеем $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2} = \ldots 2019$, откуда получаем, что произведение двух последовательных натуральных чисел будет оканчиваться на 4038, то есть $n \cdot (n + 1) = \ldots 4038$. Составим таблицу значений для последней цифры произведения двух последовательных натуральных чисел:

последняя цифра n	последняя цифра $(n + 1)$	последняя цифра $n \cdot (n + 1)$
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

Из таблицы получаем, что произведение двух последовательных натуральных чисел может оканчиваться на 0, 2 или 6, что противоречит предположению (в силу предположения произведение двух последовательных натуральных чисел оканчивается на 8). Значит, наше предположение не верно, и сумма первых нескольких натуральных чисел не может оканчиваться на 2019.

Ответ. Не может.

Задача 2

Решите в простых числах уравнение $y + 1 = x^6 - 9x^4 + 6x^2$.

Решение

Преобразуем уравнение:

$$y + 1 = x^6 - 9x^4 + 6x^2;$$

$$y = x^6 - 9x^4 + 6x^2 - 1;$$

$$y = x^6 - (9x^4 - 6x^2 + 1);$$

$$y = x^6 - (3x^2 - 1)^2;$$

$$y = (x^3 - 3x^2 + 1)\,(x^3 + 3x^2 - 1).$$

Так как x и y – простые числа (натуральные числа, имеющие ровно два натуральных делителя – 1 и само это число), то один из двух множителей в правой части уравнения равен 1, а второй – число простое. Так как x – число простое, то $x \geq 2$, следовательно, $x^3 + 3x^2 \geq 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 8 + 12 = 20 > 2$, значит, $x^3 + 3x^2 - 1 \geq 19 > 1$, то есть второй множитель в правой части уравнения не может быть равен 1. Таким образом, получаем систему уравнений, которую нужно решить в простых числах:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = 1, \\ y = x^3 + 3x^2 - 1. \end{cases}$$

Решим полученную систему.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = 1, \\ y = x^3 + 3x^2 - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 = 0, \\ y = x^3 + 3x^2 - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(x-3) = 0, \\ y = x^3 + 3x^2 - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = x^3 + 3x^2 - 1; \end{cases}$$

система не имеет решений в простых числах.

или

$$\begin{cases} x - 3 = 0, \\ y = x^3 + 3x^2 - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 53; \end{cases}$$

3 и 53 – простые числа.

Ответ. $x = 3$; $y = 53$.

Задача 3

На координатной плоскости постройте множество точек, удовлетворяющих уравнению $\dfrac{3x - 2y + 7}{2xy - 1 - x + 2y} = 0$.

Решение

Преобразуем уравнение: $\dfrac{3x-2y+7}{2xy-1-x+2y}=0$;

$$\begin{cases}3x-2y+7=0,\\ 2xy-1-x+2y\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y=3x+7,\\ 2y(x+1)-(1+x)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1{,}5x+3{,}5,\\ (x+1)(2y-1)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1{,}5x+3{,}5,\\ 2y-1\neq 0,\\ x+1\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1{,}5x+3{,}5,\\ y\neq 0{,}5,\\ x\neq -1.\end{cases}$$

Найдем координаты точки пересечения прямых $y = 1{,}5x + 3{,}5$ и $y = 0{,}5$:

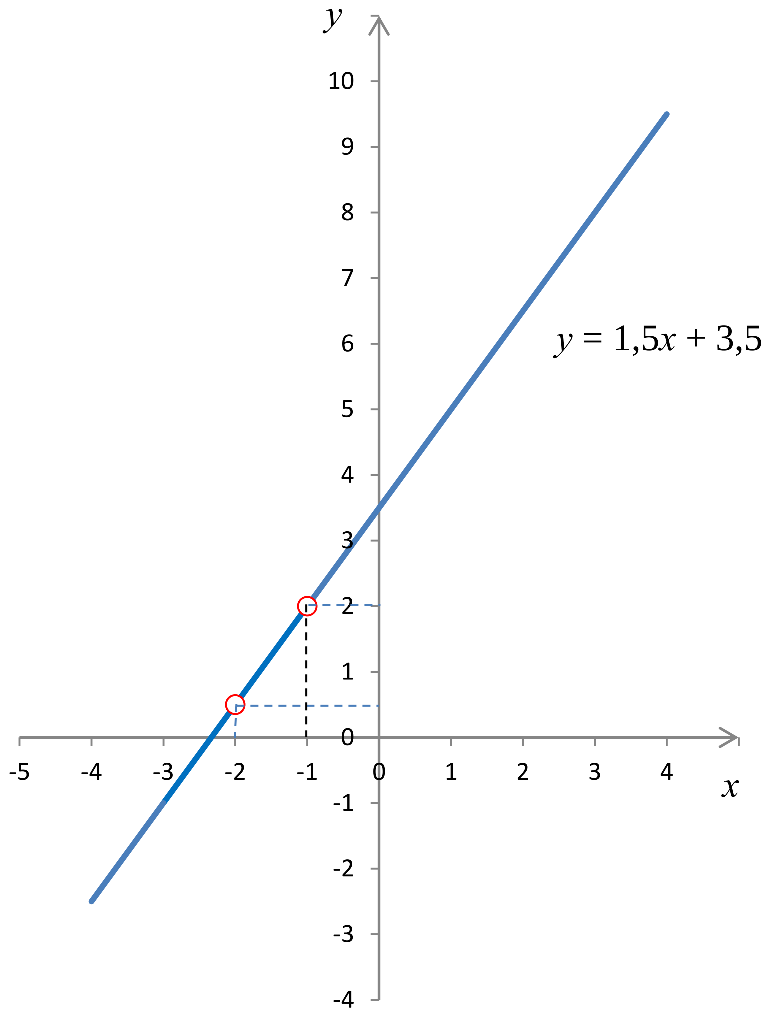
$$\begin{cases}y=1{,}5x+3{,}5,\\ y=0{,}5;\end{cases}\ \begin{cases}y=0{,}5,\\ 0{,}5=1{,}5x+3{,}5;\end{cases}\ \begin{cases}y=0{,}5,\\ 1{,}5x=-3;\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\ y=0{,}5.\end{cases}$$

Найдем координаты точки пересечения прямых $y = 1{,}5x + 3{,}5$ и $x = –1$:

$$\begin{cases}y=1{,}5x+3{,}5,\\ x=-1;\end{cases}\ \begin{cases}x=-1,\\ y=1{,}5\cdot(-1)+3{,}5;\end{cases}\ \begin{cases}x=-1,\\ y=2.\end{cases}$$

Таким образом, графиком уравнения $\dfrac{3x-2y+7}{2xy-1-x+2y}=0$ является прямая $y = 1{,}5x + 3{,}5$ за исключением точек с координатами (–2; 0,5) и (–1; 2).

Ответ.



Задача 4

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение

Пусть x – зарплата мужа, y – зарплата жены, c – стипендия дочери, a – общий доход семьи, то есть $a = x + y + c$.

Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, то есть стала бы $2x$, то общий доход семьи стал бы равен $2x + y + c$ или $1{,}67a$, так как по условию задачи в этом случае общий доход семьи вырос бы на 67%. Таким образом, имеем два равенства: $1{,}67a = 2x + y + c$ и $a = x + y + c$. Вычитая из первого равенства второе, получим $0{,}67a = x$, следовательно, зарплата мужа составляет 0,67 или 67% общего дохода семьи.

Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, то есть стала бы $\frac{c}{3}$, то общий доход семьи стал бы равен $x + y + \frac{c}{3}$ или $0{,}96a$, так как по условию задачи в этом случае общий доход семьи сократился бы на 4%. Таким образом, имеем два равенства: $a = x + y + c$ и $0{,}96a = x + y + \frac{c}{3}$. Вычитая из первого равенства второе, получим $0{,}04a = \frac{2c}{3}$ или $c = \frac{0{,}04 \cdot 3}{2} = 0{,}06$, следовательно, стипендия дочери составляет 0,06 или 6% общего дохода семьи.

Определим, сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены. Так как $x = 0{,}67a$, $c = 0{,}06a$ и $a = x + y + c$, то

$$y = a - x - c = a - 0{,}67a - 0{,}06a = 0{,}27a,$$

то есть зарплата жены составляет 0,27 или 27% общего дохода семьи.

Ответ. 27%.

Задача 5

Биссектрисы внешних углов ΔABC попарно пересекаются в точках *K, E* и *M*. Определите вид ΔKEM (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный).

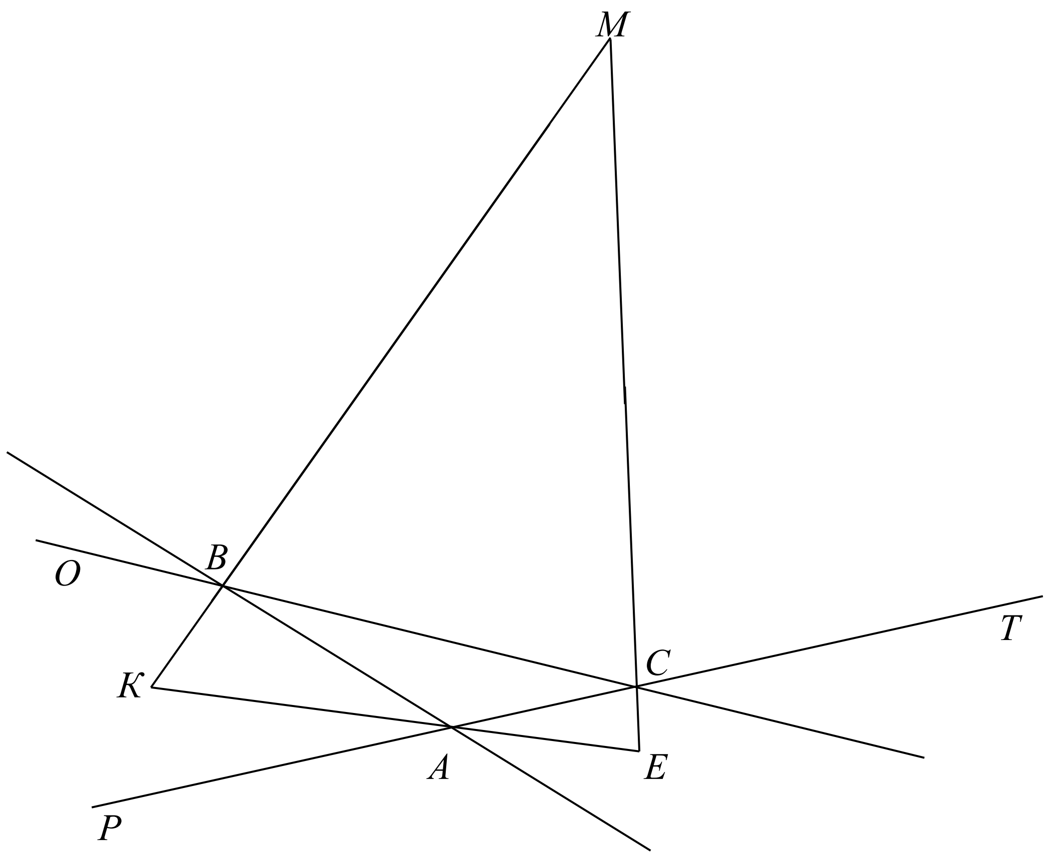
Решение

1.Так как $\angle BCT$ – внешний угол ΔABC, то $\angle BCT = \angle CBA + \angle CAB$ (по теореме о внешнем угле треугольника). CM – биссектриса $\angle BCT$ (по условию), следовательно, $\angle BCM = \frac{1}{2}\angle BCT = \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle CAB)$.

2.Аналогично, так как $\angle OBA$ – внешний угол ΔABC и BK – биссектриса $\angle OBA$, $\angle OBK = \dfrac{1}{2}\angle OBA = \dfrac{1}{2}(\angle BCA + \angle CAB)$.

3.$\angle MBC = \angle OBK = \dfrac{1}{2}(\angle BCA + \angle CAB)$ (как вертикальные).

4. В ΔABC $\angle CBA + \angle CAB + \angle BCA = 180°$ (по теореме о сумме углов треугольника).



5.Рассмотрим ΔBCM. $\angle CBM + \angle MCB + \angle M = 180°$ (по теореме о сумме углов треугольника). Тогда $\angle M = 180° - \angle CBM - \angle MCB = 180° - -\frac{1}{2}(\angle CBA + \angle CAB) - \frac{1}{2}(\angle BCA + \angle CAB) = 180° - \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle CAB + \angle BCA + \angle CAB) =$

$= 180° - \frac{1}{2}(180° + \angle CAB) = 180° - 90° - \frac{1}{2}\angle CAB = 90° - \frac{1}{2}\angle CAB$. Так как $\angle CAB < 180°$, то $\frac{1}{2}\angle CAB < 90°$, следовательно, $\angle M = 90° - \frac{1}{2}\angle CAB < 90°$, то есть $\angle M$ – острый.

6.Аналогично, из ΔBAK $\angle K = 90° - \frac{1}{2}\angle BCA < 90°$, то есть $\angle K$ – острый, а из ΔACE $\angle E = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC < 90°$, то есть $\angle E$ – острый.

7.Так как в ΔMKE $\angle M$, $\angle K$ и $\angle E$ – острые, то ΔMKE – остроугольный.

Ответ. ΔMKE остроугольный.