9 класс **<u>Задание 3</u>** **2019-2020 уч.гг.**

Задача 1

Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

Решение

Члены разложения имеют вид $C_{16}^k\left(\sqrt{x}\right)^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16-k}=C_{16}^k x^m$, где k принимает значения от 0 до 16, $m=\frac{k}{2}-\frac{16-k}{3}=\frac{5k-32}{6}$.

m=3 если $\frac{5k-32}{6}=3$, то есть k=10. Таким образом, коэффициент перед x^3 равен

$$C_{16}^{10}=\frac{16!}{10!6!}=8008$$

Ответ: 8008.

Задача 2

Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(2x+y)^2=7+z^2\\(y-z)^2=4+4x^2\\(2x-z)^2=5+y^2\end{cases}$$

Решение

Раскроем скобки в уравнениях:

$$\begin{cases}4x^2+4xy+y^2=7+z^2\\y^2-2yz+z^2=4+4x^2\\4x^2-4xz+z^2=5+y^2\end{cases}$$

Складывая все уравнения, получаем

$$4x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-4xz=16$$

$$(2x+y)^2+z^2-2z(y+2x)=16$$

$$(2x+y-z)^2=16$$

Таким образом,

$$2x+y-z=4 \text{ или } 2x+y-z=-4.$$

Вычитая из второго уравнения третье, получаем

$$2y^2-2z(y-2x)-8x^2=-1.$$

$$2\left(y^2-4x^2\right)-2z(y-2x)=-1,$$

$$2(y-2x)(y+2x-z)=-1,$$

$$y-2x=\frac{-1}{2(y+2x-z)}=\mp\frac{1}{8}.$$

Подставим в первое уравнение $2x + y = z + 4$:

$$(z+4)^2 = 7 + z^2,$$

$$8z = -9, \; z = -9/8,$$

$$\begin{cases} 2x + y = 23/8 \\ y - 2x = -1/8 \end{cases},$$

$$x = 3/4, \; y = 11/8.$$

Подставим в первое уравнение $2x + y = z - 4$:

$$(z-4)^2 = 7 + z^2,$$

$$-8z = -9, \; z = 9/8,$$

$$\begin{cases} 2x + y = -23/8 \\ y - 2x = 1/8 \end{cases},$$

$$x = -3/4, \; y = -11/8.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{4}, \frac{11}{8}, -\frac{9}{8}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{11}{8}, \frac{9}{8}\right)$

Задача 3

В двух различных емкостях содержались смеси воды и песка, причем в первой ёмкости было 1440 кг смеси, а во второй – 2560 кг. В обе ёмкости добавили воды. При этом процентное содержание песка в смесях уменьшилось в k раз в первой ёмкости и в l раз во второй. О числах k и l известно только, что $kl=9-k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе ёмкости вместе.

Решение

Пусть в первой ёмкости было a кг песка, и добавили туда x кг воды. Тогда, по условию задачи,

$$\frac{a}{1440 + x} = \frac{a}{1440k} \text{ или } x = 1440(k-1).$$

Аналогично получаем, что во вторую ёмкость добавили $2560(l-1)$ кг воды.

В обе ёмкости вместе добавлено $1440(k-1) + 2560(l-1)$ кг воды.

Таким образом, надо найти наименьшее значение величины $v = 1440(k-1) + 2560(l-1)$ при условии $kl = 9 - k$.

Так как

$$v = 160(9k + 16l) - 4000,$$

наименьшее значение v достигается при наименьшем значении $9k + 16l$.

$$l = \frac{9}{k} - 1,$$

$$9k + 16l = 9k + \frac{144}{k} - 16 = \left(3\sqrt{k} - \frac{12}{\sqrt{k}}\right)^2 + 56.$$

Значение последнего выражения минимально при $3\sqrt{k} - \frac{12}{\sqrt{k}} = 0$,

$$k=4,\ l=9/4-1=5/4,$$
$$v=160(9k+16l)-4000=160\cdot 56-4000=4960$$

Ответ: 4960 л.

Задача 4

При всех значениях параметра a решите неравенство

$$\left(ax^2+2+\sqrt{\left(ax^2+2\right)^2+1}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)<1$$

Решение

Выражения в скобках имеют вид

$$t+\sqrt{t^2+1}$$

и положительны при любых значениях x:

$$\sqrt{t^2+1}>\sqrt{t^2}=|t|\geq -t.$$

Поэтому

$$ax^2+2+\sqrt{\left(ax^2+2\right)^2+1}<\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}=\frac{\sqrt{9x^2+1}-3x}{\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)}=\sqrt{9x^2+1}-3x,$$

$$3x+\sqrt{9x^2+1}<\frac{1}{ax^2+2+\sqrt{\left(ax^2+2\right)^2+1}}=\sqrt{\left(ax^2+2\right)^2+1}-ax^2-2,$$

$$ax^2+2+3x<\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{\left(ax^2+2\right)^2+1},$$

$$ax^2+2+3x<\sqrt{\left(ax^2+2\right)^2+1}-\sqrt{9x^2+1}.$$

Сложим неравенства:

$$ax^2+2+3x<0. \qquad (*)$$

Обратно, если $ax^2+2+3x<0,$ одно из неравенств (с неотрицательной правой частью) заведомо выполнено. А так как каждое из этих двух неравенств равносильно исходному неравенству, то (*) также равносильно исходному неравенству.

При a=0 x<–2/3.

Пусть $a\neq 0$.

Уравнение $ax^2+2+3x=0$ имеет корни

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8a}}{2a} \quad \text{если } a\leq\frac{9}{8}.$$

Методом интервалов находим решение неравенства (*).

$$a<0: x<\frac{-3+\sqrt{9-8a}}{a},\ \ x>\frac{-3-\sqrt{9-8a}}{a}.$$

$$0<a\leq 9/8:\ \frac{-3-\sqrt{9-8a}}{a}<x<\frac{-3+\sqrt{9-8a}}{a}.$$

При a>9/8 неравенство решений не имеет.

Ответ: $a<0: x<\dfrac{-3+\sqrt{9-8a}}{a},\ \ x>\dfrac{-3-\sqrt{9-8a}}{a};$

$0 < a \le 9/8$: $\dfrac{-3-\sqrt{9-8a}}{a} < x < \dfrac{-3+\sqrt{9-8a}}{a}$;

a>9/8: решений нет.

Задача 5

Вектор ***a*** имеет координаты (x, 1–x), вектор ***b*** – координаты $\left(x^2-2x, x^2-2x+1\right)$. При каких значениях x векторы а) коллинеарны; б) одинаково направлены; в) ортогональны?

Решение

Векторы ***a*** и ***b*** всегда ненулевые (если x=0, то 1–x=1, координаты вектора ***b*** отличаются на 1).

Векторы коллинеарны, если найдётся число λ такое, что

$$\begin{cases} x^2-2x=\lambda x \\ x^2-2x+1=\lambda(1-x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-2x=\lambda x \\ (x-1)^2=\lambda(1-x) \end{cases}$$

Второе равенство выполнено при x=1 и при 1–x=λ.

Пусть x=1. Тогда из первого равенства получаем λ=–1.

Пусть 1–x=λ. Тогда $x^2-2x=x-x^2$, x=0 или x=3/2. Соответственно λ=1 или λ=–1/2.

Векторы сонаправлены при x=0 (λ>0).

Векторы ортогональны, если

$$x\left(x^2-2x\right)+(1-x)\left(x^2-2x+1\right)=0,$$

$$x^3-2x^2+1-3x+3x^2-x^3=0,$$

$$x^2-3x+1=0,\quad x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: а) x=1, x=0, x=3/2; б) x=0; в) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.