Задание № 5

Задача 1

На вопрос о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок больше, чем двоек, на 3, троек на 1 меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 ученика?

Решение

Пусть x учеников класса получили оценку 2 за контрольную работу, тогда $(x + 3)$ ученика получили оценку 5, $4x$ учеников получили оценку 4, $(4x – 1)$ ученика получили оценку 3. Всего учеников в классе $x + (4x – 1) + 4x + (x + 3)$ или 32 ученика. Получаем уравнение

$$x + (4x - 1) + 4x + (x + 3) = 32;$$

$$10x + 2=32;$$

$$10x = 30;$$

$$x = 3.$$

Таким образом, за контрольную работу оценку 2 получили 3 ученика класса, тогда оценку 5 получили $x + 3 = 3 + 3 = 6$ (учеников), оценку 4 получили $4x = 4\cdot 3 = 12$ (учеников).

Ответ. 6 учеников класса получили оценку 5, 12 учеников – оценку 4.

Задача 2

Для каждого значения параметра a найдите все значения x, при которых отношение значения выражения $5a - 54x$ к значению выражения $4ax - 3 + a$ равно 3.

Решение

Отношение выражения $5a - 54x$ к выражению $4ax - 3 + a$ можно найти при условии, что $4ax - 3 + a \neq 0$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{5a - 54x}{4ax - 3 + a} = 3.$$

Данное уравнение является уравнением с параметром и равносильно следующей системе

$$\begin{cases} 5a - 54x = 3(4ax - 3 + a), \\ 4ax - 3 + a \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала первое уравнение системы. Оно является линейным уравнением с параметром. Для каждого значения параметра a найдем решения этого уравнения.

$$5a - 54x = 12ax - 9 + 3a;$$

$$12ax + 54x = 5a - 3a + 9;$$

$$6x(2a + 9) = 2a + 9.$$

Возможно два случая.

1) $2a + 9 = 0$, $a = -4{,}5$. При $a = -4{,}5$ уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = 0.$$

Решением уравнения является любое действительное значение x. Подставим $a = -4{,}5$ во второе неравенство системы. Неравенство примет вид

$$-18x - 7{,}5 \neq 0;$$

$$-18x \neq 7{,}5;$$

$$x \neq -\frac{5}{12}.$$

Таким образом, при $a = –4{,}5$ системе $\begin{cases} 5a - 54x = 3(4ax - 3 + a), \\ 4ax - 3 + a \neq 0 \end{cases}$ удовлетворяет любое действительное значение x, кроме $x = -\frac{5}{12}$.

2) $2a + 9 \neq 0$, $a \neq –4{,}5$. При $a \neq –4{,}5$ уравнение $6x(2a + 9) = 2a + 9$ имеет единственный корень $x = \frac{2a+9}{6(2a+9)}$; $x = \frac{1}{6}$.

Найдем, при каком значении параметра $x = \frac{1}{6}$ не будет удовлетворять неравенству $4ax – 3 + a \neq 0$.

$$4a\cdot\frac{1}{6} - 3 + a = 0;$$

$$\frac{5}{3}a = 3;$$

$$a = 1{,}8.$$

Таким образом, при $a = 1{,}8$ система $\begin{cases} 5a - 54x = 3(4ax - 3 + a), \\ 4ax - 3 + a \neq 0 \end{cases}$ решений не имеет, при $a \neq 1{,}8$ и $a \neq –4{,}5$ система $\begin{cases} 5a - 54x = 3(4ax - 3 + a), \\ 4ax - 3 + a \neq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение $x = \frac{1}{6}$.

Ответ. При $a = –4{,}5$ x – любое действительное число, кроме $-\frac{5}{12}$, то есть $x \neq -\frac{5}{12}$; при $a = 1{,}8$ нет значений x, удовлетворяющих условию задачи; при $a \neq 1{,}8$ и $a \neq –4{,}5$ $x = \frac{1}{6}$.

Задача 3

Упростите выражение $\frac{9}{(a-3)(c-3)}-\frac{a^2}{(a-c)(3-a)}-\frac{c^2}{(3-c)(c-a)}$.

Решение

Преобразуем заданное выражение

$$\frac{9}{(a-3)(c-3)}-\frac{a^2}{(a-c)(3-a)}-\frac{c^2}{(3-c)(c-a)}=\frac{9}{(a-3)(c-3)}+\frac{a^2}{(a-c)(a-3)}-\frac{c^2}{(c-3)(a-c)}=$$

$$=\frac{9}{(a-3)(c-3)}+\frac{a^2(c-3)-c^2(a-3)}{(a-c)(a-3)(c-3)}=\frac{9}{(a-3)(c-3)}+\frac{a^2c-3a^2-ac^2+3c^2}{(a-c)(a-3)(c-3)}=$$

$$=\frac{9}{(a-3)(c-3)}+\frac{(a^2c-ac^2)-(3a^2-3c^2)}{(a-c)(a-3)(c-3)}=\frac{9}{(a-3)(c-3)}+\frac{ac(a-c)-3(a-c)(a+c)}{(a-c)(a-3)(c-3)}=$$

$$=\frac{9}{(a-3)(c-3)}+\frac{(a-c)(ac-3(a+c))}{(a-c)(a-3)(c-3)}=\frac{9}{(a-3)(c-3)}+\frac{ac-3a-3c}{(a-3)(c-3)}=$$

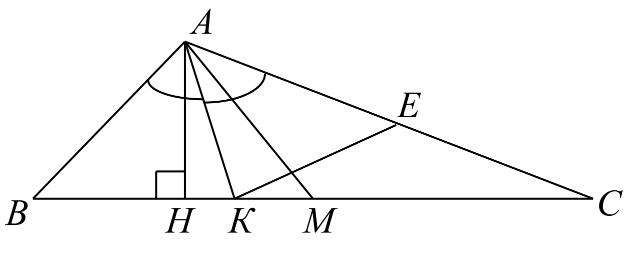
$$=\frac{9+ac-3a-3c}{(a-3)(c-3)}=\frac{(ac-3a)-(3c-9)}{(a-3)(c-3)}=\frac{a(c-3)-3(c-3)}{(a-3)(c-3)}=\frac{(a-3)(c-3)}{(a-3)(c-3)}=1.$$

Ответ. $\frac{9}{(a-3)(c-3)}-\frac{a^2}{(a-c)(3-a)}-\frac{c^2}{(3-c)(c-a)}=1.$

Задача 4

Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведенными из той же вершины.

Решение



Рассмотрим неравнобедренный треугольник ABC. Предположим для определенности, что $AB < AC$. Проведем из вершины A медиану AM, высоту AH и биссектрису AK. Докажем, что точка K лежит между точками M и H.

Так как $AB < AC$, то в силу теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника $\angle C < \angle B$.

Докажем, что $\angle AKB < \angle AKC$.

$\angle AKB$ – внешний угол ΔAKC, следовательно, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle AKB = \angle KAC + \angle C$.

$\angle AKC$ – внешний угол ΔAKB, следовательно, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle AKC = \angle KAB + \angle B$.

Так как AK – биссектриса ΔABC, то $\angle KAB = \angle KAC$, тогда, так как $\angle C < \angle B$, то $\angle AKB < \angle AKC$. Так как $\angle AKB$ и $\angle AKC$ – смежные, то $\angle AKB + \angle AKC = 180°$, следовательно, $\angle AKB$ – острый, $\angle AKC$ – тупой.

Докажем, что $BK < KC$. Отметим на стороне AC точку E такую, что $AE = AB$. Рассмотрим ΔABK и ΔAEK. $AB = AE$, $\angle KAB = \angle KAE$, AK – общая сторона, значит, $\Delta ABK = \Delta AEK$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $BK = KE$, $\angle B = \angle AEK$, $\angle AKB = \angle AKE$.

$\angle KEC$ – внешний угол ΔAKE, следовательно, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle KEC = \angle AKE + \angle KAE$.

$\angle BKE$ – внешний угол ΔKEC следовательно, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle BKE = \angle KEC + \angle C$. Так как $\angle BKE = \angle BKA + \angle AKE$ и $\angle AKB = \angle AKE$, то $\angle KEC + \angle C = 2\angle AKE$, откуда $\angle C = 2\angle AKE - \angle KEC =$ $= 2\angle AKE - (\angle AKE + \angle KAE) = \angle AKE - \angle KAE$.

Так как $\angle KEC = \angle AKE + \angle KAE$, а $\angle C = \angle AKE - \angle KAE$, то в ΔKEC $\angle KEC > \angle C$, следовательно, в силу теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника, $KC > KE$, а так как $KE = BK$, то $KC > KB$.

Таким образом, получили, что если в ΔABC $AB < AC$ и AK – биссектриса ΔABC, то $\angle AKB < \angle AKC$ и $BK < KC$.

Так как $BK + KC = BC$ и $BK < KC$, то $KC > \frac{1}{2}AC$. AM – медиана ΔABC, значит, M – середина BC, то есть $MC = \frac{1}{2}AC$, следовательно, точка M лежит между точками K и C, то есть точка M лежит на луче KC.

Так как AH – высота ΔABC, то $\angle AHK = 90°$, следовательно, в ΔAHK $\angle AKH$ – острый, то есть $\angle AKH = \angle AKB$, то есть точка H лежит на луче KB.

Так как точка M лежит на луче KC, H лежит на луче KB, то точка K лежит между точками H и M, что и требовалось доказать.

Задача 5

а) Коля и Вася выписывают 20-значное число, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет Коля, вторую – Вася, третью – снова Коля, и т.д. Вася хочет получить число, делящееся на 9. Сможет ли Коля ему помешать?

б) А если число 30-значное?

Решение

а) Коля сможет помешать Васе. Для этого первой цифрой Коля пишет 1, а каждым своим следующим ходом Коля записывает такую цифры, которая в сумме с цифрой, написанной Васей, дает 6 (то есть если Вася пишет 1, то Коля следующим ходом пишет 5, если Вася пишет 2, то Коля следующим ходом пишет 4, если Вася пишет 3, то Коля следующим ходом пишет 3, если Вася пишет 4, то Коля следующим ходом пишет 2, если Вася пишет 5, то Коля следующим ходом пишет 1). Тогда после записи 19-той цифры сумма цифр, записанных Васей и Колей будет равна $6 \cdot 9 + 1 = 55$. Последним ходом Вася может к записанному 19-тизначному числу добавить цифру от 1 до 5, тогда сумма цифр записанного 20-тизначного числа может принимать значения от 56 до 60 включительно. Так как ни одно из чисел 56, 57, 58, 59, 60 не делится на 9, то по признаку делимости на 9 и записанное 20-тизначное число не будет делиться на 9.

Замечание. Для того, чтобы помешать Васе, Коля первой цифрой может написать, кроме 1, 2 или 3, а дальше действовать по указанному выше алгоритму.

б) Коля не сможет помешать Васе. Для того чтобы получить 30-тизначное число, делящееся на 9, Вася каждым своим ходом должен записывать цифру, которая в сумме с цифрой, записанной Колей предыдущим ходом, дает 6. Тогда сумма цифр написанного 30-тизначного числа будет равна $6 \cdot 15 = 90$. Так как 90 делится на 9, то, в силу признака делимости на 9, записанное 30-тизначное число будет делиться на 9.

Ответ. а) Коля сможет помешать Васе; б) Коля не сможет помешать Васе.