8 класс **2019-2020 уч.гг**

Задание № 5

Задача 1

Решите в натуральных числах уравнение $\sqrt{3x+2\sqrt{2}}+\sqrt{3x-2\sqrt{2}}=\sqrt{8y}$.

Решение

Так как x и y числа натуральные, то $8y > 0$, $3x+2\sqrt{2}>0$, а в силу того, что $x \geq 1$, $3x \geq 3 = \sqrt{9}>\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $3x-2\sqrt{2}>0$. Так как при натуральных x и y левая и правая части уравнения $\sqrt{3x+2\sqrt{2}}+\sqrt{3x-2\sqrt{2}}=\sqrt{8y}$ являются положительными, то возведем обе части уравнения в квадрат. Получим

$$\left(\sqrt{3x+2\sqrt{2}}+\sqrt{3x-2\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{8y}\right)^2;$$
$$3x+2\sqrt{2}+2\sqrt{3x+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3x-2\sqrt{2}}+3x-2\sqrt{2}=8y;$$
$$6x+2\sqrt{\left(3x+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3x-2\sqrt{2}\right)}=8y;$$
$$6x+2\sqrt{9x^2-8}=8y;\ \ |:2$$
$$\sqrt{9x^2-8}=4y-3x.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат, учитывая, что $4y-3x \geq 0$. Получим систему

$$\begin{cases}9x^2-8=(4y-3x)^2,\\ 4y-3x\geq 0.\end{cases}$$

Решим в натуральных числах первое уравнение системы.

$$9x^2-8=16y^2-24xy+9x^2;$$
$$16y^2-24xy=-8;\ \ |:(-8)$$
$$3xy-2y^2=1;$$
$$y(3x-2y)=1.$$

Так как x и y – числа натуральные, то $3x-2y$ – целое, следовательно, оба множителя равны 1, то есть получаем

$$\begin{cases}y=1,\\ 3x-2y=1;\end{cases}$$
$$\begin{cases}y=1,\\ x=1.\end{cases}$$

При $x=1$, $y=1$ $4y-3x=4-3=1\geq 0$, следовательно, $x=1$, $y=1$ – решение уравнения $\sqrt{3x+2\sqrt{2}}+\sqrt{3x-2\sqrt{2}}=\sqrt{8y}$ в натуральных числах.

Ответ. $x=1$, $y=1$.

Задача 2

Для каждого значения параметра a найдите все значения x, при которых значение выражения $\frac{x^2-3}{(x-4)^2}$ будет равно $\frac{a^2-3}{(a-4)^2}$.

Решение

При $a = 4$ задача не имеет смысла, то есть $a = 4$ не является допустимым значением параметра.

Рассмотрим допустимые значения параметра, то есть $a \neq 4$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{x^2-3}{(x-4)^2} = \frac{a^2-3}{(a-4)^2};$$

$$\frac{x^2-3}{(x-4)^2} - \frac{a^2-3}{(a-4)^2} = 0;$$

$$\frac{(x^2-3)(a-4)^2 - (a^2-3)(x-4)^2}{(x-4)^2(a-4)^2} = 0;$$

$$\frac{(x^2-3)(a^2-8a+16) - (a^2-3)(x^2-8x+16)}{(x-4)^2(a-4)^2} = 0;$$

$$\frac{x^2a^2 - 3a^2 - 8x^2a + 24a + 16x^2 - 48 - a^2x^2 + 3x^2 + 8xa^2 - 24x - 16a^2 + 48}{(x-4)^2(a-4)^2} = 0;$$

$$\frac{x^2(19-8a) + 8x(a^2-3) - 19a^2 + 24a}{(x-4)^2(a-4)^2} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2(19-8a) + 8x(a^2-3) - 19a^2 + 24a = 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы $x^2(19-8a) + 8x(a^2-3) - 19a^2 + 24a = 0$. Оно является квадратным уравнением с параметром.

Рассмотрим значения параметра, при которых качественно меняется уравнение (контрольные значения параметра).

1) $19 - 8a = 0$, $a = \frac{19}{8}$. При $a = \frac{19}{8}$ уравнение примет вид

$$8x\left(\frac{361}{64} - 3\right) - \frac{19}{8}\left(\frac{361}{8} - 24\right) = 0;$$

$$\frac{169}{8}x - \frac{19}{8} \cdot \frac{169}{8} = 0;$$

$$x = \frac{19}{8}.$$

Так как $\frac{19}{8} \neq 4$, то при $a = \frac{19}{8}$ уравнение $\frac{x^2-3}{(x-4)^2} = \frac{a^2-3}{(a-4)^2}$ имеет единственный корень $x = \frac{19}{8}$.

2) $a \neq \frac{19}{8}$. Преобразуем квадратное уравнение.

$$x^2(19-8a)+8x(a^2-3)-19a^2+24a=0;$$

$$19x^2-8x^2a+8xa^2-24x-19a^2+24a=0;$$

$$19(x^2-a^2)-8xa(x-a)-24(x-a)=0;$$

$$(x-a)(19(x+a)-8xa-24)=0;$$

$$(x-a)(x(19-8a)+19a-24)=0;$$

$$x = a \text{ или } x = \frac{24-19a}{19-8a}.$$

2.1) Найдем значение параметра a, при котором корни уравнения $x = a$ и $x = \frac{24-19a}{19-8a}$ будут совпадать.

$$a = \frac{24-19a}{19-8a};$$

$$a(19 - 8a) = 24 - 19a;$$

$$8a^2 - 38a + 24 = 0;$$

$$4a^2 - 19a + 12 = 0;$$

$$4a^2 - 16a - 3a + 12 = 0;$$

$$4a(a - 4) - 3(a - 4) = 0;$$

$$(4a - 3)(a - 4) = 0;$$

$$a = \frac{3}{4} \text{ или } a = 4.$$

Так как $a = 4$ – недопустимое значение параметра, то квадратное уравнение $x^2(19-8a)+8x(a^2-3)-19a^2+24a=0$ имеет единственный корень $x = a$ при $a = \frac{3}{4}$. А в силу того, что $x = a = \frac{3}{4} \neq 4$, то при $a = \frac{3}{4}$ уравнение $\frac{x^2-3}{(x-4)^2} = \frac{a^2-3}{(a-4)^2}$ имеет единственный корень $x = a = \frac{3}{4}$.

2.2) При $a \neq 4$, $a \neq \frac{19}{8}$ и $a \neq \frac{3}{4}$ квадратное уравнение $x^2(19-8a)+8x(a^2-3)-19a^2+24a=0$ имеет два различных действительных корня $x=a$, $x=\frac{24-19a}{19-8a}$. Выясним, при каких значениях параметра один из этих корней не будет удовлетворять условию $x \neq 4$. Так как допустимыми значениями параметра являются $a \neq 4$, то для всех рассматриваемых значений параметра корень $x=a$ удовлетворяет условию $x \neq 4$. Найдем, при каких значениях параметра корень $x=\frac{24-19a}{19-8a}$ совпадет с 4.

$$\frac{24-19a}{19-8a}=4;$$

$$24-19a=4(19-8a);$$

$$32a-19a=76-24;$$

$$13a=52;$$

$$a=4.$$

Так как допустимыми значениями параметра являются $a \neq 4$, то для всех рассматриваемых значений параметра корень $x=\frac{24-19a}{19-8a}$ удовлетворяет условию $x \neq 4$.

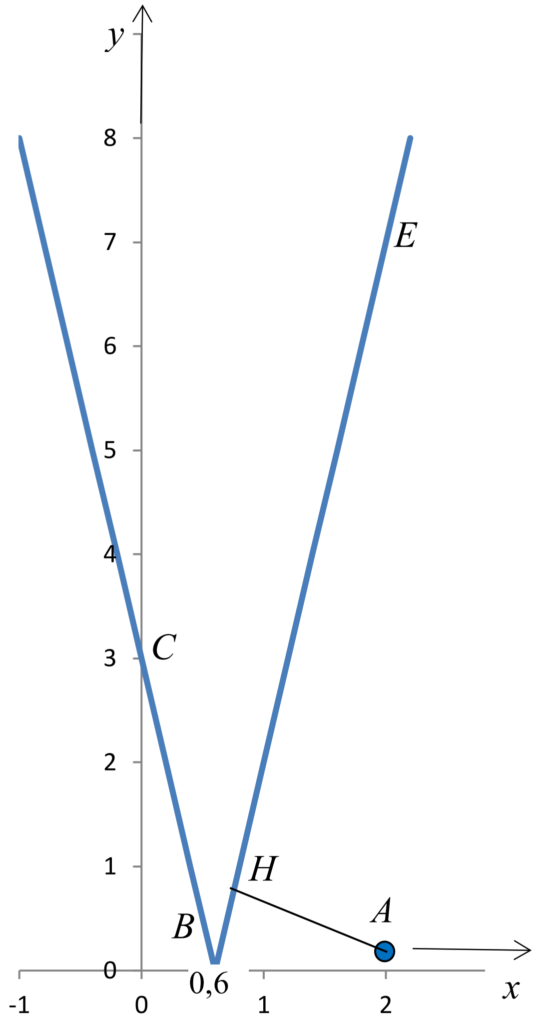
Таким образом, при $a \neq 4$, $a \neq \frac{19}{8}$ и $a \neq \frac{3}{4}$ уравнение $\frac{x^2-3}{(x-4)^2}=\frac{a^2-3}{(a-4)^2}$ имеет два различных действительных корня $x=a$, $x=\frac{24-19a}{19-8a}$.

Ответ. При $a=4$ задача не имеет смысла; при $a=\frac{19}{8}$ или $a=\frac{3}{4}$ $x=a$; при $a \neq 4$, $a \neq \frac{19}{8}$ и $a \neq \frac{3}{4}$ $x=a$, $x=\frac{24-19a}{19-8a}$.

Задача 3

На графике функции $y = |5x - 3|$ найдите точку, ближайшую к точке $A(2;\,0)$.

Решение



Построим график функции $y = |5x - 3|$. Раскроем модуль, получим

$$y = \begin{cases} 5x - 3 & при\ \ 5x - 3 \geq 0, \\ 3 - 5x & при\ \ 5x - 3 < 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 5x - 3 & при\ \ x \geq \dfrac{3}{5}, \\ 3 - 5x & при\ \ x < \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Обозначим точки графика функции $B(0{,}6;\,0)$, $C(0;\,3)$, $E(2;\,7)$. Так как $\angle ABC$ тупой, то ближайшей к точке А точкой луча BC является точка B, так как для любой точки M луча BC, $M \neq B$, в треугольнике ABM $\angle ABM > \angle AMB$, следовательно, $AM > AB$. Так как $\angle ABE$ острый, то ближайшей к точке A точкой луча BE является основание перпендикуляра H, опущенного из точки A на прямую BE. Так как AB – наклонная к прямой BE, AH – перпендикуляр к прямой BE, то $AH < AB$, следовательно, ближайшей к точке A точкой графика функции $y = |5x - 3|$ является точка H.

Координаты точки H будем искать как координаты точки пересечения прямых BE и AH. Прямая BE задается уравнением $y = 5x - 3$. Угловой коэффициент прямой BE $k_{BE} = 5$. Найдем уравнение прямой AH. Так как прямые BE и AH перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_{BE} \cdot k_{AH} = -1$, откуда $k_{AH} = -\dfrac{1}{k_{BE}} = -\dfrac{1}{5} = -0{,}2$. Тогда уравнение прямой AH имеет вид $y = -0{,}2x + b$. Значение b найдем из условия, что точка $A(2;\,0)$ принадлежит прямой AH, следовательно, координаты точки A удовлетворяют уравнению прямой AH. Тогда получаем

$$0 = -0{,}2 \cdot 2 + b,$$
$$b = 0{,}4.$$

Тогда уравнение прямой AH имеет вид $y = 0{,}2x + 0{,}4$. Координаты точки H являются решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} y = 5x - 3, \\ y = -0{,}2x + 0{,}4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5x - 3, \\ 5x - 3 = -0{,}2x + 0{,}4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5{,}2x = 3{,}4, \\ y = 5x - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{17}{26}, \\ y = \dfrac{7}{26}. \end{cases}$$

Получили, что искомая точка H имеет координаты $\left(\dfrac{17}{26}; \dfrac{7}{26}\right)$, то есть ближайшая к точке $A(2;\,0)$ точка графика функции $y = |5x - 3|$ имеет координаты $\left(\dfrac{17}{26}; \dfrac{7}{26}\right)$.

Ответ. $\left(\dfrac{17}{26}; \dfrac{7}{26}\right)$.

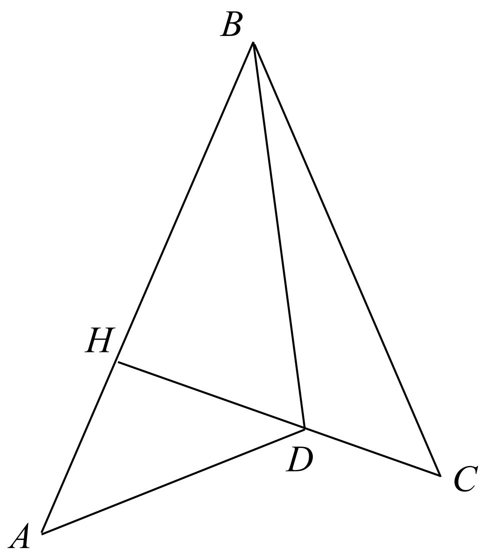
Задача 4

В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = 45°$. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна половине квадрата диагонали BD.

Решение

Продлим сторону CD до пересечения со стороной AB в точке H.

Рассмотрим ΔBCH. $\angle HBC = \angle C = 45°$ (по условию). По теореме о сумме углов треугольника $\angle HBC + \angle C + \angle BHC = 180°$, следовательно, $\angle BHC = 180° - -(\angle HBC + \angle C) = 180° - 90° = 90°$, значит, $CH \perp AB$, ΔBCH – прямоугольный и равнобедренный, $BH = CH$, $S_{BCH} = \dfrac{1}{2} BH \cdot CH = \dfrac{1}{2} BH^2$.



Рассмотрим ΔAHD. $\angle A = 45°$ (по условию), $\angle AHD = 90°$, так как $CH \perp AB$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle AHD + \angle A + \angle ADH = 180°$, следовательно, $\angle ADH = 180° - (\angle AHD + \angle A) = 180° - - 135° = 45°$, значит, ΔAHD – прямоугольный и равнобедренный, $AH = DH$, $S_{AHD} = \dfrac{1}{2} AH \cdot DH = \dfrac{1}{2} DH^2$.

Рассмотрим ΔBHD, $\angle BHD = 90°$, так как $CH \perp AB$. По теореме Пифагора $BD^2 = BH^2 + DH^2$.

$$S_{ABCD} = S_{AHD} + S_{BHC} = \frac{1}{2}DH^2 + \frac{1}{2}BH^2 = = \frac{1}{2}(DH^2 + BH^2) = \frac{1}{2} BD^2,$$ что и требовалось доказать.

Задача 5

Математик шел домой вверх по течению ручья со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения, и держал в руках шляпу и палку. На ходу он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой. Вскоре, заметив ошибку, он бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей той, с какой шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно достал ее из воды, повернулся и, как ни в чем ни бывало, пошел домой с прежней скоростью. Через 40 секунд после того, как он догнал шляпу, он встретил палку, плывущую ему на встречу. Насколько раньше пришел бы он домой, если бы все время шел вперед?

Решение

Пусть скорость течения ручья равна x м/с, тогда скорость математика по дороге домой равна $1{,}5x$ м/с, а скорость, с которой бежал математик, равна $3x$ м/с. Обозначим за t время в секундах, которое потребовалось математику на то, чтобы догнать шляпу, от момента, как он побежал назад. Тогда расстояние, на которое вернулся математик, равно $3xt$ м. Это расстояние будет равно сумме расстояния, которое пройдет математик за 40 с от момента, как он догнал шляпу, со скоростью $1{,}5x$ м/с и расстояния, которое проплывет палка по ручью за время $(t + 40)$ с со скоростью x м/с. Получаем уравнение

$$3xt = 40\cdot 1{,}5x + (t + 40)\cdot x; \quad |:x$$

$$3t = 40\cdot 1{,}5 + t + 40;$$

$$2t = 100;$$

$$t = 50.$$

Таким образом, на то, чтобы догнать шляпу, математик затратил 50 с. Так как в обратном направлении он двигался со скоростью, в два раза меньшей той, с которой он догонял шляпу, то на то, чтобы вернуться в точку, из которой он побежал догонять шляпу, ему потребовалось времени в два раза больше того, которое он догонял шляпу, то есть $2\cdot 50 = 100$ (с). Тогда всего математик затратил лишних $50 + 100 = 150$ (с) на путь домой, а поэтому он пришел бы домой раньше на 150 с или 2,5 мин, если бы все время шел вперед.

Ответ. На 2,5 минуты.