<u>Задание 5</u>

Задача 1

Из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2+4x+q=0$. Какова вероятность, что это уравнение а) не имеет корней, б) имеет один действительный корень, в) корни уравнения – рациональные числа?

Решение

Дискриминант уравнения равен $D=16-4q$.

Уравнение не имеет корней, если $D<0$, то есть $q>4$. Вероятность выбрать одно из чисел 5, 6, 7, 8, 9 равна 0,5.

Вероятность того, что $q=4$ (уравнение имеет один корень) равна 0,1.

Корни уравнения находятся по формуле $-2\pm\sqrt{4-q}$. Они будут рациональными, если $q=0$, $q=3$ или $q=4$. Вероятность выбрать одно из этих чисел равна 0,3.

Ответ: а) 0,5; б) 0,1; в) 0,3.

Задача 2

Решите уравнение

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0.$$

Решение

Выделим полный квадрат в левой части уравнения.

$$x^2+2x\sin(xy)+1=(x+\sin(xy))^2+1-\sin^2(xy)=(x+\sin(xy))^2+\cos^2(xy).$$

Так как

$(x+\sin(xy))^2\geq 0,\ \cos^2(xy)\geq 0,$

равенство суммы этих чисел нулю возможно только если они оба равны нулю, то есть

$$\begin{cases} x+\sin(xy)=0 \\ \cos^2(xy)=0 \end{cases}.$$

Второе равенство означает, что

$$xy=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

Если n=2k, то

$$\sin(xy)=1,\ x=-1,\ y=-\frac{\pi}{2}-2\pi k.$$

Если n=2k+1, то

$$\sin(xy)=-1,\ x=1,\ y=\frac{3\pi}{2}+2\pi k.$$

Обозначая в первом случае m=–k, а во втором m=k+1, получим окончательный ответ.

Ответ:

$x=\pm 1,\ y=-\frac{\pi}{2}+2\pi m;\ m\in Z.$

Задача 3

В начале года строительная фирма выбирает банк для получения кредита среди нескольких банков, кредитующих под разные проценты. Полученным кредитом фирма планирует распорядиться следующим образом: три четверти кредита направить на строительство коттеджей, а остальные деньги - на оказание риэлтерских услуг населению. Первый проект может принести прибыль в размере от 35% до 41% годовых, а второй – от 20% до 24% годовых. В конце года фирма должна вернуть кредит банку с процентами и при этом рассчитывает на чистую прибыль от указанных видов деятельности не менее 14%, но и не более 21% годовых от всего полученного кредита. Какими должны быть наименьшая и наибольшая процентные ставки кредитования выбираемых банков (равные целому числу процентов), чтобы фирма гарантированно обеспечила себе указанный выше уровень прибыли?

Решение

Пусть x – ставка кредитования банка в процентах, S – размер кредита. Тогда в конце года нужно вернуть $S\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

Обозначим через y и z прибыль (в процентах) от первого и второго проектов соответственно. Тогда чистая прибыль от обоих проектов равна

$$\frac{3}{4}S\left(1+\frac{y}{100}\right)+\frac{1}{4}S\left(1+\frac{z}{100}\right)-S\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{S}{4}\left(3+1-4+\frac{3y+z-4x}{100}\right)=\frac{S}{400}(3y+z-4x)$$

По условию,

$$0{,}14S\le\frac{S}{400}(3y+z-4x)\le 0{,}21S,\ 35\le y\le 41,\ 20\le z\le 24.$$

Таким образом,

$$56\le 3y+z-4x\le 84,$$
$$3y+z-84\le 4x\le 3y+z-56,$$
$$\frac{3y+z}{4}-21\le x\le\frac{3y+z}{4}-14$$

Так как неравенство должно выполняться для любых yи z из заданных промежутков, в левую часть неравенства надо подставлять наибольшие значения yи z, а в правую – наименьшие.

$$\frac{3\cdot 41+24}{4}-21\le x\le\frac{3\cdot 35+20}{4}-14$$
$$\frac{3\cdot 41+24}{4}-21\le x\le\frac{3\cdot 35+20}{4}-14$$
$$15{,}75\le x\le 17{,}25.$$

Условию задачи удовлетворяют значения x=16 и x=17.

Ответ: 16 и 17.

Задача 4

Решите ребус. Буквы и звёздочки обозначают цифры от 0 до 9 (*З*≠0). Различные буквы соответствуют различным цифрам.

$$\begin{array}{r} ЗИМА \\ \underline{ЗИМА} \\ ***** \\ ***** \\ ***** \\ \underline{*****} \\ ****ЗИМА \end{array}$$

Решение

Пусть x – искомое число ЗИМА. Тогда число $x^2 - x$ заканчивается четырьмя нулями, то есть

$$x^2 - x = 2^4 5^4 a,\ a \text{ – целое.}$$

Так как $x>2$, числа x и x–1 взаимно простые. Возможны два случая:

$$\text{а) } x = 2^4 y,\ x - 1 = 5^4 z;\ \text{б) } x - 1 = 2^4 y,\ x = 5^4 z.$$

В случае а) имеем:

$$2^4 y - 1 = 5^4 z,$$

так как $625 = 16 \cdot 39 + 1$, получаем

$$16y - 1 = 625z = 16 \cdot 39z + z,\ 16(y - 39z) = z + 1,$$

то есть z+1делится на 16. Поскольку $x = 625z + 1 \le 9999$, $z \le 15$, единственное подходящее значение z=15, тогда $y = 39z + 1 = 586$, $x = 9376$.

В случае б)

$$2^4 y + 1 = 5^4 z,\ 16(y - 39z) = z - 1,$$

то есть z–1делится на 16. Поскольку $x = 625z \le 9999$, $z \le 15$, единственное подходящее значение z=1, но тогда x=625 –трехзначное число (*З*=0).

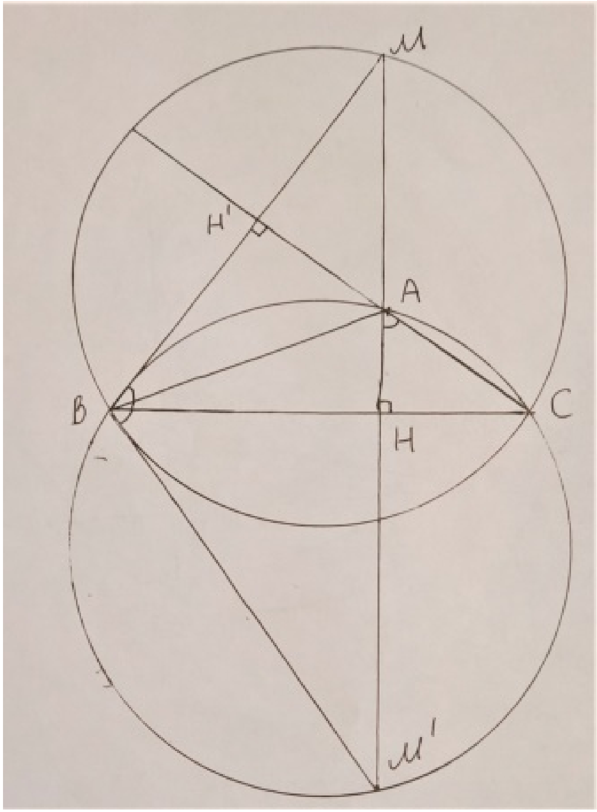
Ответ: 9376.

Задача 5

Какую фигуру образует множество ортоцентров (точек пересечения высот) всех треугольников, имеющих общую сторону, при условии, что углы, противолежащие этой стороне, равны?

Решение

Пусть длина общей стороны *BC*треугольников равна *a*, угол*A*, противолежащий стороне *BC*, равен *α*. Тогда вершины *A* треугольников лежат на дугах двух равных окружностей радиуса $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, имеющих общую хорду *BC*.



Предположим, угол α – острый. Рассмотрим треугольники *ABC*, лежащие по одну сторону хорды *AB*.Продолжим высоту *AH*треугольника, опущенную из вершины *A* до пересечения с окружностью, пусть это точка *M'*. Обозначим через *M* точку пересечения высот треугольника *ABC*.

Так как четырехугольник *ABM'C* вписан в окружность, угол *BM'C* равен 180°-*α*, углы *M'BC* и *M'AC* равны, так как опираются на одну дугу.

Углы *CBM* и *MAC*равны $90^{\circ} - \angle C$, то есть равны между собой.

Таким образом, точки *M'*и *M*симметричны относительно прямой *BC*. Точка *M*лежит на опирающейся на *BC* дуге второй окружности, меньшей полуокружности.

Обратно, пусть *M* – любая точка этой дуги. Проведём через неё перпендикуляр к прямой *BC*и пусть *A*и*M'* – точки пересечения этой прямой с окружностью, причем точки*A*и *M* лежат по одну сторону от прямой *BC*. Тогда *MH*=*M'H*, следовательно углы *M'BC*и *CBM*равны. Далее, углы *M'BC* и *M'AC* равны, так как опираются на одну дугу, углы *AMH'*и *BMH* вертикальные. Таким образом, угол *BH'A*прямой, то есть *M* – точка пересечения высот треугольника *ABC*.

Повторяя рассуждения для второй окружности, заключаем, что искомая фигура состоит из двух опирающихся на хорду *BC*дуг окружностей, меньших полуокружности.

Аналогично можно рассмотреть случай тупого угла α. Образующие фигуру дуги будут больше полуокружности.

Если угол при вершине – прямой, то искомая фигура – окружность (с выколотыми точками*B* и *C*) с диаметром *BC*.

Ответ: дуги двух окружностей с общей хордой.