

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА (2020-2021 учебный год)

Задание 3

Задача 1

Пусть n – натуральное число. Через $n!!$ обозначается произведение всех нечетных чисел от 1 до n , если n нечетное, и произведение всех четных чисел от 2 до n , если n четное. Докажите, что число $2020!! \cdot 2019!!$ делится на 2021.

Решение

Так как $2021 = 43 \cdot 47$, числа $2019!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2017 \cdot 2019$ и $2020!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2020 = 2^{1010} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1010 = 2^{1010} \cdot 1010!$ делятся на 2021. Следовательно, и разность чисел делится на 2021.

Задача 2

На скамейку садятся трое мальчиков и две девочки, размещаясь при этом чисто случайно. Что более вероятно: девочки окажутся разделенными друг от друга или будут сидеть рядом?

Решение

Всего способов размещения на скамейке $5! = 120$. Способов разместиться так, чтобы девочки сидели рядом – $2 \cdot 4! = 48$ ($4!$ способа посадить троих мальчиков и пару из девочек, два способа составить пару из девочек). Таким образом, вероятность того, что две девочки будут сидеть рядом, равна $48/120 = 0,4$. Соответственно вероятность того, что девочки окажутся разделенными друг от друга – 0,6.

Ответ: вероятнее, что девочки окажутся разделенными.

Задача 3

Банк предлагает клиентам сберегательные сертификаты трех видов (при минимальной сумме вклада 100 тыс. рублей):

- 1- й: сроком на 3 года и увеличением вклада на 17%;
- 2- й: сроком на 2 года и увеличением вклада на 11%;
- 3- й: сроком на 1 год и увеличением вклада на 5%.

Если клиент закрывает вклад по сберегательному сертификату раньше установленного срока, то проценты по вкладу не начисляются.

Какая наибольшая сумма может оказаться у клиента банка, вложившего в сертификат 200 тыс. рублей, через 4 года? (Предполагается, что за это время процентные ставки по сертификатам меняться не будут).

Решение

Вкладывая сумму S в сертификат первого типа, клиент получит $1,17S$ через три года, покупая сертификат второго типа клиент получит $1,11S$ через два года, третьего типа – $1,05S$ через год.

Так как $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$, клиент может вложить деньги в сертификат первого типа, а через три года всю полученную сумму – в сертификат третьего типа (а), либо вложить деньги в сертификат второго типа, а через два года или все полученные деньги снова вложить в сертификат второго типа (б) или в каждый из оставшихся двух лет покупать на всю сумму сертификаты третьего типа (в). Наконец, можно каждый год вкладывать деньги в сертификаты третьего типа (г). В результате применения этих четырех стратегий у клиента окажутся, соответственно, суммы

$$1,17 \cdot 1,05 \cdot S, 1,11^2 \cdot S, 1,11 \cdot 1,05^2 \cdot S, 1,05^4 \cdot S.$$

Так как $1,05^2 = 1,1025 < 1,11$, стратегии (в) и (г) приносят меньшую прибыль, чем стратегия (б). Далее, $1,17 \cdot 1,05 = 1,2285$, $1,11^2 = 1,2321$. Поэтому стратегия (б) самая выгодная, клиент получит $1,2321 \cdot 200000 = 246420$ рублей.

Ответ: 246420 рублей.

Задача 4

Найдите периметр фигуры, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} ||x + 4| + y| \leq 3 \\ x^2 + y^2 + 8x + 20 \leq 6y \end{cases}$$

Решение

Рассмотрим первое неравенство системы. Найдём множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют равенству $||x + 4| + y| = 3$.

Раскрывая модуль, получаем

$$\begin{aligned} |x + 4| + y = 3 \text{ или } |x + 4| + y = -3, \\ \begin{cases} x + 4 + y = 3, & x + 4 \geq 0, \\ -x - 4 + y = 3, & x + 4 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + 4 + y = -3, & x + 4 \geq 0, \\ -x - 4 + y = -3, & x + 4 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -1, & x \geq -4, \\ -x + y = 7, & x < -4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = -7, & x \geq -4, \\ -x + y = 1, & x < -4. \end{cases} \end{aligned}$$

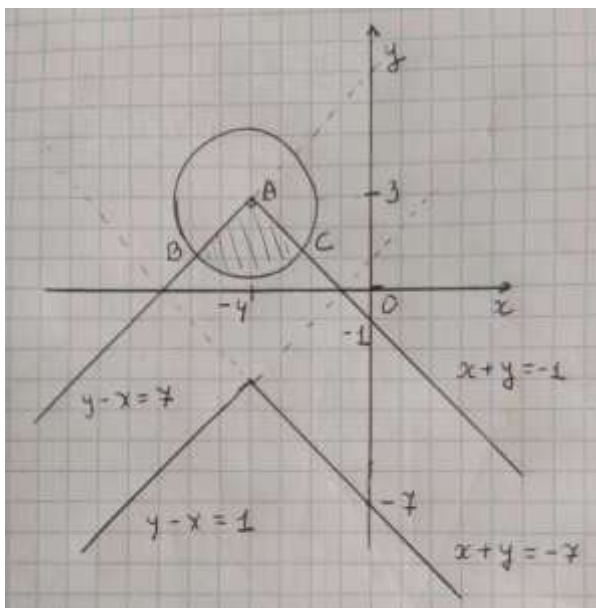
На координатной плоскости получаем две ломаные линии, которые делят плоскость на три области. В каждой из областей выражение $||x + 4| + y| - 3$ принимает значения одного знака: в верхней, включающей начало координат, и в нижней выражение положительно, в области между ломаными это выражение отрицательно. Таким образом, первому неравенству удовлетворяют координаты точек средней области.

Рассмотрим второе неравенство системы.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8x + 20 &\leq 6y, \\ (x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 20 &\leq 0, \\ (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &\leq 5. \end{aligned}$$

Равенство $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ определяет окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке $A(-4,3)$. Второму неравенству системы удовлетворяют координаты точек внутри окружности.

Таким образом, фигура, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств – сектор круга. Граница фигуры состоит из дуги ВС, длина которой равна четвертой части длины окружности, и двух отрезков (АВ и АС) длиной, равной радиусу окружности.



Ответ: $(\sqrt{5} \pi)/2 + 2\sqrt{5}$.

Задача 5

Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке Q. Через точку Q проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках K и L соответственно. Найдите длину отрезка AQ, если известно, что $AK=KB$, $DL:LC=2:1$, $BQ:QD=2:3$, $CQ=6$.

Решение

Опустим перпендикуляры AE, BF, CG, DH на прямую.

Треугольник AEK равен треугольнику BFK, поэтому $AE=BF$.

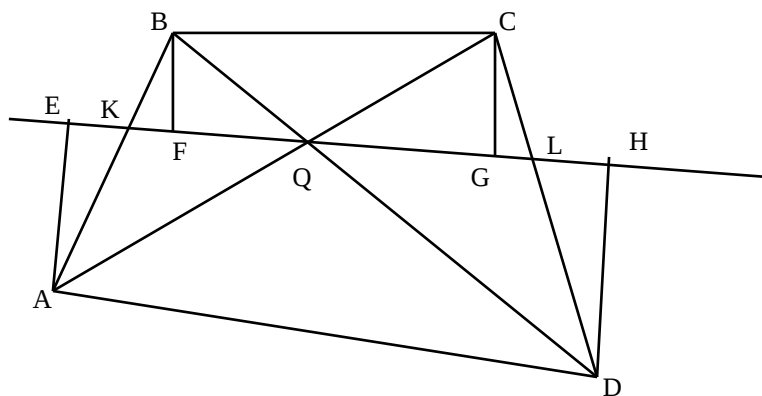
Треугольник DHL подобен треугольнику CGL, поэтому $DH:CG = DL:LC = 2$.

Треугольник BFQ подобен треугольнику DHQ, поэтому $BF:DH = BQ:QD = 2:3$.

Треугольник AEQ подобен треугольнику CGQ, поэтому $AQ:CQ = AE:CG$.

Таким образом,

$$AQ = CQ \cdot \frac{AE}{CG} = CQ \cdot \frac{BF}{DH} \cdot 2 = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 8.$$



Ответ: 8.