РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 4 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2020-2021 учебный год)
Задача 1

Какое трехзначное число имеет наибольшее число делителей?

Решение

Представим число в виде $a = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$, где $p_1, \dots, p_m$ – простые делители. Тогда общее количество делителей числа, включая 1 и само число, равно

$$(s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_m + 1).$$

Очевидно, чтобы количество делителей было больше, простые делители должны быть как можно меньше, а степени – как можно больше.

Трехзначное число не может содержать больше четырёх простых делителей, так как произведение пяти самых маленьких простых чисел равно

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310.$$

Предположим, число содержит четыре простых делителя: 2, 3, 5, 7.

Так как $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, число останется трехзначным, если домножить на 4 или 3. В первом случае получаем число 840, у которого $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ делителя, во втором – число 630, у которого 24 делителя.

Предположим, число содержит один простой делитель, тогда $a = 2^s$. Так как $2^{10} = 1024$, наибольшее возможное $s = 9$ и у числа a 10 делителей.

Предположим, число содержит два простых делителя, то есть $a = 2^{s_1} 3^{s_2}$.

При $s_1 = 8$ $s_2 = 1$, количество делителей числа 768 равно 18,

при $s_1 = 7$ $s_2 = 1$, при $s_1 = 4$ $s_2 = 3$,

при $s_1 = 6$ $s_2 = 2$, количество делителей числа 576 равно 21,

при $s_1 = 5$ $s_2 = 3$, количество делителей числа 864 равно 24.

при $s_1 = 4$ $s_2 = 3$.

Предположим, число содержит три простых делителя, 2, 3 и 5. Так как $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, можно увеличить степень двойки, тогда получим число $2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960$, у которого 28 делителей, степени двойки и тройки, тогда получим число $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$, у которого 30 делителей, либо увеличить степени всех трёх простых сомножителей, тогда получим число 900, у которого 27 делителей.

Ответ:840 (32 делителя).

Задача 2

В классе учится 30 учеников. На каждом уроке геометрии учитель опрашивает по домашнему заданию 10 человек, причем среди опрашиваемых всегда есть один, у которого проверяли работу на прошлом уроке. Один из учеников решил, что будет готовить домашнее задание к следующему уроку только в том случае, если его не спрашивали на предыдущем. На что у него больше шансов – впустую подготовиться к уроку или получить двойку за невыполненное задание?

Решение

Всех учеников класса разобьём на четыре группы:

1) Те, кого опросили на предыдущем уроке и проверили работу на этом.
2) Те, кого на прошлом уроке опросили, а на текущем – нет.
3) Те, кого не спрашивали на предыдущем уроке, но спросили на текущем.
4) Те, кого не спрашивали ни на предыдущем уроке, ни на текущем.

По условию задачи, первая группа содержит одного человека, поэтому вероятность получить двойку равна 1/30. Группы 2) и 3) содержат по 9 человек, поэтому в группу 4) попадают 11 человек (30-1-9-9). Следовательно, вероятность впустую подготовиться к уроку равна 11/30.

Ответ: Больше шансов впустую подготовиться к уроку.

адача 3

Из точки A по прямой начали двигаться одновременно в одном направлении две точки: первая равноускорено с начальной скоростью 3м/с и ускорением 2 м/с^2, вторая – равномерно. Какую скорость могла иметь вторая точка, если сначала она обогнала первую точку, а затем первая точка догнала вторую на расстоянии не большем, чем 10 м от A?

Решение

Пусть v м/с – скорость второй точки. По условию, $v > 3$.

Скорость первой точки изменяется по закону $3 + 2t$. За время t первая точка пройдет расстояние $3t + t^2$, а вторая – расстояние vt.

Пусть t – момент, в который первая точка догнала вторую. Получаем систему.

$$\begin{cases} v > 3 \\ 3t + t^2 = vt \\ 3t + t^2 \leq 10 \end{cases}$$

Решая третье неравенство, находим, что $t \leq 2$.

Из второго равенства следует, что $v = t + 3$.

Таким образом, $3 < v \leq 5$.

Ответ: $3 < v \leq 5$ (м/с).

Задача 4

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x - \big|3x - |x + a|\big| = 9|x - 3|$$

имеет два корня.

Решение

Рассмотрим функцию $y = 4x - \big|3x - |x + a|\big|$. График функции – ломаная линия, каждое звено которой (соответствующее конкретному случаю раскрытия модуля) имеет уравнение $y = kx + b$. Наибольшее возможное значение коэффициента k равно 8, а наименьшее – 0.

Графиком функции $y = 4x - \left|3x - |x+a|\right| - 9|x-3|$ будет ломаная линия, угловые коэффициенты отрезков которой будут отрицательными, если $x > 3$ и положительными, если $x < 3$. Таким образом, функция возрастает при $x < 3$ и убывает при $x > 3$.

Уравнение имеет два корня, когда график функции $y = 4x - \left|3x - |x+a|\right| - 9|x-3|$ пересекает ось 0х в двух точках. Это возможно тогда и только тогда, когда $y(3) > 0$. Получаем:

$$12 - \left|9 - |3+a|\right| > 0,$$
$$\left|9 - |3+a|\right| < 12,$$
$$-12 < 9 - |3+a| < 12,$$
$$-13 < |3+a| < 21,$$
$$-21 < 3 + a < 21,$$
$$-24 < a < 18.$$

Ответ: $-24 < a < 18$

Задача 5

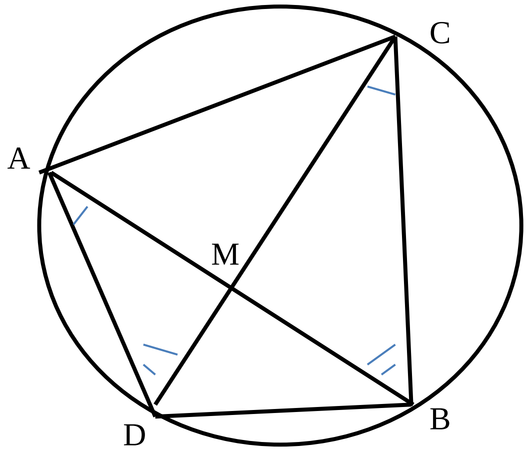
Около треугольника *ABC* описана окружность. Продолжение биссектрисы *CM* треугольника пересекает окружность в точке *D*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AM*=2, *BM*=3, *DM*=2.

Решение

Четырехугольник *ACBD* вписан в окружность. $\angle DAB = \angle DCB$, $\angle ABC = \angle ADC$. Таким образом, треугольники *AMD* и *CMB* подобны, следовательно, *CM*=3.

По свойству биссектрисы, $BC : AC = BM : AM = 3 : 2$.

Пусть $BC = 3x$, $AC = 2x$, $\angle BMC = \varphi$



Запишем теорему косинусов для треугольника BMC:

$$9x^2 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos\varphi.$$

Запишем теорему косинусов для треугольника AMC (угол AMC смежный с углом BMC):

$$4x^2 = 4 + 9 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\varphi.$$

Первое из записанных равенств умножим на 2, второе – на 3, и сложим:

$$30x^2 = 36 + 39 = 75,$$

$$x = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Таким образом, стороны треугольника ABC равны 5, $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}/2$. Найдём площадь по формуле Герона:

$$p = \frac{10 + 5\sqrt{10}}{4},$$

$$S = \frac{1}{16}\sqrt{\left(10 + 5\sqrt{10}\right)\left(5\sqrt{10} - 10\right)\left(10 + \sqrt{10}\right)\left(10 - \sqrt{10}\right)} = \frac{5}{8}\sqrt{15 \cdot 9} = \frac{15}{8}\sqrt{15}.$$

Ответ: $15\sqrt{15}/8$