

Задание № 5**Задача 1**

Расстояние от совхоза до города равно 25 км. В 8 ч навстречу друг другу из совхоза выехал автобус, а из города – почтовая машина и в 8 ч 15 мин они встретились. На другой день автобус вышел в тоже время, а почтовая машина на 25 мин позже и встретились они в 8 ч 30 мин. Найдите скорость автобуса и скорость почтовой машины.

Решение

Пусть скорость автобуса равна x км/ч, а скорость почтовой машины – y км/ч. В первый день автобус и почтовая машина выехали одновременно навстречу друг другу и встретились через 15 мин после начала движения.

15 мин = $\frac{1}{4}$ ч. За это время они проехали $\frac{1}{4}(x + y)$ км, что составляет 25 км.

Получаем уравнение $\frac{1}{4}(x + y) = 25$.

На другой день автобус до момента встречи с почтовой машиной был в пути 30 мин, а почтовая машина – 5 мин. 30 мин = $\frac{1}{2}$ ч, 5 мин = $\frac{1}{12}$ ч. За это время

они проехали $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}y\right)$ км, что составляет 25 км. Получаем уравнение

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}y = 25$. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(x + y) = 25, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}y = 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ 6x + y = 300. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы первое, получим $5x = 200$, откуда $x = 40$. Подставим найденное значение x в первое уравнение: $40 + y = 100$, откуда $y = 60$. Таким образом, скорость автобуса равна 40 км/ч, а скорость почтовой машины – 60 км/ч.

Ответ. Скорость автобуса равна 40 км/ч, а скорость почтовой машины – 60 км/ч.

Задача 2

Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $\frac{(a+1)(x-a+4)}{x^2-9} = 0$ и $a^2x - 12a = ax + 2a^2$ равносильны.

Решение

Два уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают, то есть каждый корень первого уравнения является корнем второго, и каждый корень второго уравнения является корнем первого. Уравнения, не имеющие корней, являются равносильными.

Решим сначала каждое из уравнений с параметром.

$$\frac{(a+1)(x-a+4)}{x^2-9} = 0;$$

$$\begin{cases} (a+1)(x-a+4) = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)(x-a+4) = 0, \\ (x-3)(x+3) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)(x-a+4) = 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

При $a = -1$ система принимает вид $\begin{cases} 0 \cdot (x+5) = 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$ Решением системы являются

все значения x , кроме 3 и -3 , то есть при $a = -1$ $x \neq \pm 3$.

При $a \neq -1$ система принимает вид $\begin{cases} x = a - 4, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$ Если $a - 4 = 3$, $a = 7$, то система

решений не имеет. Если $a - 4 = -3$, $a = 1$, то система решений не имеет. Если $a \neq 7$ и $a \neq \pm 1$, то $x = a - 4$.

Таким образом, при $a = 7$ или $a = 1$ первое уравнение решений не имеет; при $a = -1$ корнями первого уравнения являются все действительные значения x , кроме 3 и -3 , то есть $x \neq \pm 3$; при $a \neq 7$ и $a \neq \pm 1$ первое уравнение имеет единственный корень $x = a - 4$.

$$a^2x - 12a = ax + 2a^2;$$

$$a^2x - ax = 12a + 2a^2;$$

$$a(a - 1)x = 2a(a + 6).$$

Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, решением которого является любое действительное значение x .

Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 14$, полученное уравнение корней не имеет.

Если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{2(a + 6)}{a - 1}$.

Таким образом, при $a = 0$ корнями второго уравнения являются все действительные значения x ; при $a = 1$ второе уравнение корней не имеет; при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ второе уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2(a + 6)}{a - 1}$.

Сравним теперь полученные решения уравнений.

При $a = 0$ первое уравнение имеет один корень, а у второго уравнения бесконечно много корней, поэтому уравнения равносильными не являются.

При $a = 1$ и первое и второе уравнения корней не имеют, следовательно, уравнения равносильны.

При $a = -1$ первое уравнение имеет бесконечно много корней, а второе уравнение имеет один корень, поэтому уравнения равносильными не являются.

При $a = 7$ первое уравнение корней не имеет, а второе уравнение имеет один корень, поэтому уравнения равносильными не являются.

При $a \neq 0$, $a \neq 7$ и $a \neq \pm 1$ оба уравнения имеют по одному корню. Чтобы уравнения были равносильными, их корни должны совпадать. Значит, остальные значения параметра a , при которых уравнения являются равносильными, удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq \pm 1, \\ a \neq 7, \\ a - 4 = \frac{2(a+6)}{a-1}. \end{cases}$$

Решим уравнение $a - 4 = \frac{2(a+6)}{a-1}$.

$$\begin{cases} (a-4)(a-1) = 2a+12, \\ a-1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 4 = 2a + 12, \\ a-1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 7a - 8 = 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 8a - 8 = 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+1) - 8(a+1) = 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)(a-8) = 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1, \quad a = 8, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$a = -1, \quad a = 8.$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq \pm 1, \\ a \neq 7, \\ a = -1, a = 8; \end{cases}$$

$$a = 8.$$

Таким образом, при $a = 8$ уравнения являются равносильными.

Ответ. $a = 1, a = 8.$

Задача 3

Упростите выражение $\left(\frac{5c^2 - c}{25c^2 - 10c + 1} + \frac{4}{1 - 25c^2} \right) : \left(1 - \frac{3}{5c - 1} \right) - \frac{c}{5c + 1}$ и

укажите, при каких значениях c это выражение имеет смысл.

Решение

Найдем значение c , при которых выражение имеет смысл.

$$\begin{cases} 25c^2 - 10c + 1 \neq 0, \\ 1 - 25c^2 \neq 0, \\ 5c - 1 \neq 0, \\ 5c + 1 \neq 0, \\ 1 - \frac{3}{5c - 1} \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5c - 1)^2 \neq 0, \\ (1 - 5c)(1 + 5c) \neq 0, \\ 5c \neq 1, \\ 5c \neq -1, \\ \frac{5c - 4}{5c - 1} \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \neq 0, 2, \\ c \neq -0, 2, \\ 5c - 4 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \neq 0,2, \\ c \neq -0,2, \\ c \neq 0,8. \end{cases}$$

Выражение имеет смысл при всех значениях c , кроме $0,2$, $-0,2$ и $0,8$.

Упростим выражение.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5c^2 - c}{25c^2 - 10c + 1} + \frac{4}{1 - 25c^2} \right) : \left(1 - \frac{3}{5c - 1} \right) - \frac{c}{5c + 1} = \left(\frac{c(5c - 1)}{(5c - 1)^2} - \frac{4}{(5c - 1)(5c + 1)} \right) : \frac{5c - 4}{5c - 1} - \\ & - \frac{c}{5c + 1} = \left(\frac{c}{(5c - 1)} - \frac{4}{(5c - 1)(5c + 1)} \right) \cdot \frac{5c - 1}{5c - 4} - \frac{c}{5c + 1} = \frac{c(5c + 1) - 4}{(5c - 1)(5c + 1)} \cdot \frac{5c - 1}{5c - 4} - \frac{c}{5c + 1} = \\ & = \frac{5c^2 + c - 4}{(5c - 1)(5c + 1)} \cdot \frac{5c - 1}{5c - 4} - \frac{c}{5c + 1} = \frac{5c^2 + 5c - 4c - 4}{(5c - 1)(5c + 1)} \cdot \frac{5c - 1}{5c - 4} - \frac{c}{5c + 1} = \\ & = \frac{5c(c + 1) - 4(c + 1)}{(5c - 1)(5c + 1)} \cdot \frac{5c - 1}{5c - 4} - \frac{c}{5c + 1} = \frac{(c + 1)(5c - 4)}{(5c - 1)(5c + 1)} \cdot \frac{5c - 1}{5c - 4} - \frac{c}{5c + 1} = \frac{c + 1}{5c + 1} - \frac{c}{5c + 1} = \\ & = \frac{c + 1 - c}{5c + 1} = \frac{1}{5c + 1}. \end{aligned}$$

Ответ. $\left(\frac{5c^2 - c}{25c^2 - 10c + 1} + \frac{4}{1 - 25c^2} \right) : \left(1 - \frac{3}{5c - 1} \right) - \frac{c}{5c + 1} = \frac{1}{5c + 1}$; выражение

имеет смысл при $c \neq \pm 0,2$ и $c \neq 0,8$.

Задача 4

На рисунке точки B и E равноудалены от прямой AD , а точки C и M – середины отрезков AD и BC соответственно. Докажите, что $BC = ED$.

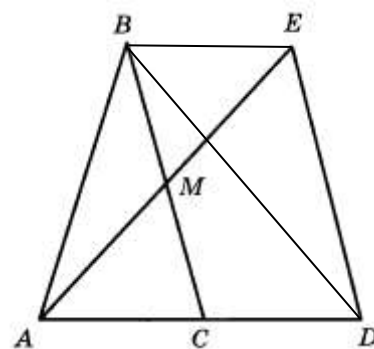
Решение

Проведем отрезки BE и BD .

Так как точки B и E лежат по одну сторону относительно прямой AD и равноудалены от этой прямой, то $BE \parallel AD$.

Рассмотрим $\triangle AMC$ и $\triangle EMB$.

$BM = MC$ по условию (так как M – середина BC);



$\angle AMC = \angle EMB$ как вертикальные;

$\angle MCA = \angle MBE$ как накрест лежащие при $BE \parallel AD$ и секущей BC .

Значит, $\triangle AMC = \triangle EMB$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $AC = BE$.

Так как C – середина AD , то $AC = CD$, значит, $BE = AC = CD$.

Рассмотрим $\triangle BCD$ и $\triangle DEB$.

$BE = CD$ по доказанному;

BD – общая сторона;

$\angle BDC = \angle DBE$ как накрест лежащие при $BE \parallel AD$ и секущей BD .

Значит, $\triangle BCD = \triangle DEB$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $BC = ED$, что и требовалось доказать.

Задача 5

В волейбольном турнире участвовало 12 команд. Оказалось, что ни одна из команд не одержала ровно 7 побед. Докажите, что найдутся такие три команды A , B и C , что команда A выиграла у команды B , команда B выиграла у команды C , а команда C выиграла у команды A . (Ничьих в волейболе нет.)

Решение

Так как в турнире участвовало 12 команд, то возможное количество побед для одной из команд от 0 до 11 (12 различных значений). По условию ни одна из команд не одержала 7 побед, значит, для количества побед остается 11 возможных значений, а команд 12, следовательно, по принципу Дирихле, найдутся две команды с одинаковым числом побед. Кроме того, 11 побед может быть не более, чем у одной команды (она выиграла у всех остальных) и 0 побед может быть не более, чем у одной команды (она проиграла всем остальным), а поэтому найдутся две команды с одинаковым количеством побед, число которых отлично от 0 и 11. Пусть это команды A и B . Пусть, для определенности, команда A выиграла у команды B . Так как количество побед у команд A и B одинаковое и A выиграла у B , то найдется команда C такая, что C выиграла у A и проиграла B

(если такой команды C не существует, то побед у команды A будет больше, чем у команды B , что противоречит выбору команд A и B с одинаковым числом побед), **что и требовалось доказать.**