

На правах рукописи

КРЮКОВ Алексей Константинович

**МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ
В ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ АНСАМБЛЯХ**

01.04.03 – радиофизика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2010

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Г.В. Осипов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор В.Н. Белых
доктор физико-математических наук
профессор В.П. Пономаренко

Ведущая организация: Институт Прикладной Физики РАН

Защита состоится «____» _____ 2010 г. в _____ на
заседании диссертационного совета Д 212.166.07 при Нижегородском
государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу:
Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. __1__, ауд. __420__ .

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан «____» _____ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент



Черепенников В.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы

Синхронизация автоколебаний – одно из фундаментальных явлений в естествознании, оно присуще системам самой разнообразной физической природы. Эффект синхронизации периодических автоколебаний был открыт Гюйгенсом в XVII веке. Интерес к задачам синхронизации нелинейных колебаний радиофизических систем, изучение которых было начато в классических работах нижегородской школы академика А.А. Андропова по теории захвата частоты автогенераторов, значительно возрос в последние годы. Это связано с возникшей проблемой динамики процессов синхронизации в больших ансамблях связанных нелинейных колебательных систем.

Системы связанных нелинейных осцилляторов встречаются в различных областях науки: физике, биологии, нейрофизиологии, химии и технике: электронике, радиотехнике, системах передачи данных. Так, в сверхпроводниковой электронике особый интерес вызывают исследования синхронного поведения систем джозефсоновских контактов, на основе которых возможно создание узкополосных генераторов миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн. Изучение синхронизации сложных колебаний в биофизике направлено как на изучение сложных биологических систем (мозг, сердце и др.), так и на создание приборов медицинской радиоэлектроники и на разработку методов лечения ряда заболеваний, в частности, сердечных аритмий. Таким образом, проблемы теории синхронизации относятся к актуальным задачам современной теории нелинейных колебаний.

При изучении коллективной динамики ансамблей автоколебательных систем важное место имеют задачи, связанные с исследованием особенностей взаимодействия систем со сложной динамикой. Большое количество работ посвящено исследованию различных типов синхронного поведения, включая фазовую синхронизацию (В.С. Анищенко, В.Н. Белых, Г.В. Осипов, А.С. Пиковский, М.Г. Розенблум, Д.Э. Постнов, М.А. Закс, А.А. Короновский, А.Е. Храмов, Ю. Куртц, Е. Мозекильде и др.), обобщенную синхронизацию (Н.Ф. Рульков, М.М. Сушик, Л.Ш. Цимринг и др.), а также полную и кластерную синхронизацию. К наиболее строгому типу синхронного поведения относят полную синхронизацию, при которой исчезают различия в динамическом поведении всех подсистем, связанных в одном ансамбле (В.С. Анищенко, В.С. Афраймович, В.Н. Белых, И.И. Блехман, А.С. Дмитриев, В.И. Некоркин, Н.Н. Веричев, П.С. Ланда, Ю.И. Неймарк, Ю.М. Романовский, В.В. Матросов, М.И. Рабинович, В.Д. Шалфеев, Л.П. Шильников, Ю.Л. Майстренко, А.Ю. Погромский, Б. Эрментроут, Н. Копелл, Л. Пекора, С. Строгатц, В. Линдсей и др.)

В то же время, несмотря на длительную историю, продолжает привлекать внимание одна из простейших задач теории синхронизации – задача о динамике двух взаимодействующих систем с предельными циклами. Этой

задаче посвящено значительное количество важных, фундаментальных и практически значимых трудов. Однако в достаточно простой на первый взгляд системе двух связанных генераторов с предельными циклами продолжают обнаруживать новые эффекты и режимы. На основе этой базовой модели формулируют новые принципиальные вопросы, исследование которых имеет большое фундаментальное значение как для теории синхронизации, так и для нелинейной динамики в целом. В частности, в диссертации приводятся результаты исследования неидентичных систем, начиная с динамики двух связанных элементов и заканчивая цепочками и решетками связанных осцилляторов.

В последнее время значительный интерес исследователей, работающих в области нелинейной динамики, также привлечен к изучению поведения нелинейных систем, обладающих свойством мультистабильности, т.е. наличием в фазовом пространстве большого числа сосуществующих аттракторов. Установление того или иного движения определяется начальными условиями. Мультистабильность обнаружена во многих электрических, лазерных, механических и биологических системах. Мультистабильность может иметь место и в одном элементе, и в ансамблях, как малых (2-3 взаимосвязанных элемента), так и в больших: цепочках и решетках. В больших системах в связи с наличием множества степеней свободы взаимодействие временных и пространственных масштабов приводит к возникновению нетривиальных коллективных эффектов – формированию пространственно-временных структур, распространению бегущих волн различной конфигурации, появлению пространственно-временного беспорядка и т.д.

В нелинейной динамике существует несколько парадигматических моделей, чаще всего используемых для демонстрации тех или иных эффектов. Примеры таких моделей – осциллятор Ван дер Поля, а также элементы, описываемые уравнениями маятникового типа. Это хорошо изученные системы, которые применяются для моделирования широкого круга явлений и процессов. В диссертации рассматриваются три модели – осцилляторы Бонхоффера – Ван Дер Поля (также известные как ФитцХью-Нагумо), слабонелинейные осцилляторы Ван Дер Поля и осцилляторы маятникового типа.

Цель диссертации

Целью диссертации являлось теоретическое исследование и численное моделирование синхронизации в ансамблях локально связанных неидентичных осцилляторов: Бонхоффера – Ван Дер Поля, слабонелинейных осцилляторов Ван Дер Поля и систем маятникового типа. В частности:

- исследование существования мультистабильности синхронных режимов в цепочках (и решетках) связанных осцилляторов
- определение нижней оценки количества синхронных режимов в цепочке для произвольного количества элементов
- исследование поведения элементов в ансамбле при силе связи, недостаточной для глобальной синхронизации

– обнаружение коллективных эффектов, специфических для определенной модели или конфигурации ансамбля

Методы исследований и достоверность научных результатов

При решении поставленных задач использовались методы теории колебаний и теории бифуркаций динамических систем, а также методы численного моделирования. Достоверность результатов, сформулированных в диссертации, подтверждается их непротиворечивостью экспериментальным данным и численным расчетам, известным из литературы; воспроизводимостью результатов при рассмотрении различных математических моделей, в отдельных случаях строгими доказательствами, а также согласованием полученных теоретических оценок с результатами численного моделирования.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается как в постановке ряда не решенных ранее задач, так и в полученных оригинальных результатах:

1. Впервые сделана оценка количества сосуществующих режимов глобальной синхронизации в ансамбле локально диффузионно связанных слабо-неоднородных релаксационных и слабонелинейных осцилляторов
2. Предложен и теоретически использован метод упрощения модели релаксационного осциллятора к кусочно-линейной системе более низкого порядка, что позволило провести теоретическое исследование синхронных режимов в системе двух связанных элементов
3. Впервые получен режим чередующейся синфазной-противофазной синхронизации в системе слабонелинейных осцилляторов Ван Дер Поля, также впервые численно получены фронты переключения режимов синхронизации, распространяющиеся по ансамблю, отражающиеся от свободных концов и проходящие друг через друга без искажений
4. Обнаружен и описан противофазный режим на примере осцилляторов маятникового типа
5. Для осцилляторов маятникового типа обнаружены синхронные режимы, обусловленные наличием солитоноподобных решений

Практическая значимость работы

Практическая значимость работы состоит в развитии теории синхронизации в ансамблях неоднородных систем. Рассматриваемые в работе системы являются классическими объектами нелинейной динамики. Поэтому полученные результаты дают ответы на ряд вопросов теории нелинейных динамических систем и теории синхронизации. В частности, впервые сделана оценка количества сосуществующих синхронных режимов в ансамбле неоднородных элементов, впервые получены волны переключения режимов син-

хронизации, обнаружен коллективный эффект, связанный с раздвоением колебаний.

Полученные в диссертации теоретические и экспериментальные результаты могут быть использованы учреждениями, занимающимися вопросами нелинейной динамики в распределенных системах, передачей и хранением информации, и распознаванием контуров и изображений, самоорганизацией и структурообразованием (ННГУ, ИПФ РАН, СГУ, МГУ, ИРЭ РАН и др.).

Основные положения, выносимые на защиту

1. В ансамбле из N связанных автоколебательных элементов Бонхоффера-Ван Дер Поля при фиксированных значениях параметров возможно существование не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации.
2. В цепочках с периодическими граничными условиями существуют режимы, вызываемые волной возбуждения, бегущей по кольцу и задающей ритм всем элементам цепочки. В решетке существует режим, при котором ритм колебаний задается спиральной волной.
3. В цепочке из N слабонелинейных осцилляторов Ван дер Поля при фиксированных значениях параметров может сосуществовать не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации.
4. При определенных значениях параметров в цепочке слабонелинейных осцилляторов Ван дер Поля существует режим чередования во времени синфазной и противофазной синхронизации, обусловленной наличием фронтов переключения режимов синхронизации, распространяющихся вдоль цепочки, проходящих друг сквозь друга без искажений и отражающихся от свободных концов цепочки.
5. В цепочке локально связанных неидентичных элементов, описываемых уравнениями маятникового типа, реализуется мультистабильность синхронных режимов. Количество сосуществующих синхронных режимов имеет показательную зависимость от длины цепочки и связано с возможностью задания различных конфигураций солитоноподобных волн в цепочке.
6. Для рассматриваемых систем переход к глобальной синхронизации осуществляется через кластерную синхронизацию.

Апробация результатов и публикации

Основные результаты опубликованы в статьях в рецензируемых журналах: Вестник Нижегородского Университета им. Н.И. Лобачевского (2005), CHAOS (2008), Изв. ВУЗов Прикладная Нелинейная Динамика (2009), Physical Review E (2009), Радиофизика (2010). Материалы диссертации были представлены и опубликованы в трудах конференции NOLTA (Bologna, Italy 2006), Трудах XI научной конференции по радиофизике (в двух секциях)

(Нижний Новгород, 2007), International symposium on synchronization in complex networks SynCoNet2007 (Leuven, Belgium, 2007), International IEEE Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon 2007) (Postdam, 2007), итоговой научной конференции ВМК и Мехмата (Нижний Новгород, 2007), XIV научной школы "Нелинейные волны - 2008" (Нижний Новгород, 2008), Joint Symposium on International Workshop on Nonlinear Dynamics in Biological Systems and Soft-matter Biophysics Days (2009), XIV научной конференции по радиоперифизике (Нижний Новгород, 2010).

Материалы диссертации обсуждались на научных семинарах кафедр теории колебаний и автоматического регулирования и теории управления и динамики машин ННГУ, института физики академии наук Тайваня (Тайпей), факультета радиоэлектроники католического университета города Левена (Бельгия), а также института физики Потсдама (Германия)

По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, в том числе 7 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК и 9 публикаций в сборниках трудов конференций и тезисов докладов.

Личный вклад автора

Диссертант принимал непосредственное участие как в постановке задач, так и в аналитических расчетах, обсуждении и интерпретации результатов. Результаты моделирования получены диссертантом лично посредством самостоятельно созданных программных комплексов. Аналитическое исследование в пункте 2.4 диссертации и в Приложении выполнено совместно с О.И. Канаковым.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитируемой литературы, списка работ по диссертации и приложения. Общий объем диссертации составляет 120 страниц, включая 58 рисунков и список литературы из 144 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы основные цели работы, основные положения и результаты диссертации, раскрыта научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Приводятся сведения о личном вкладе автора и об апробации результатов, кратко изложено содержание работы.

Первая глава посвящена исследованию синхронизации в ансамблях локально связанных слабонейдентичных осцилляторов Бонхоффера – Ван Дер Поля:

$$\begin{cases} \dot{x}_n = F(x_n, y_n) + \beta(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \\ \dot{y}_n = \varepsilon(x_n + a_n) \\ F(x_n, y_n) = x_n - \frac{x_n^3}{3} - y_n \\ n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

где N - количество элементов в цепочке, β – сила связи. a_n и ε – параметры индивидуального элемента. Значения параметров соответствуют наличию неустойчивого состояния равновесия и устойчивого предельного цикла в фазовом пространстве несвязанного элемента. В работе рассматриваются граничные условия «свободные концы» и периодические граничные условия.

Для двух связанных элементов Бонхоффера-Ван Дер Поля в компьютерных экспериментах было показано, что в этой системе при некоторых значениях параметров сосуществуют два устойчивых предельных цикла. Первый соответствует синфазному синхронному режиму (рис. 1а), второй – противофазному (рис. 1б).

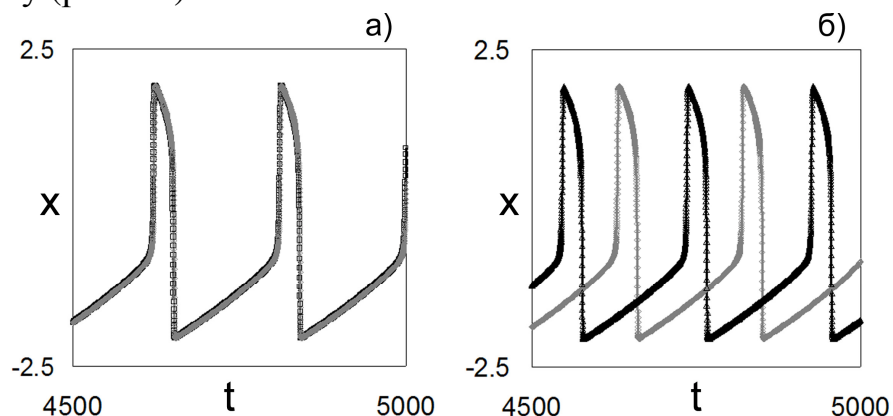


Рис. 1. Осциллограммы элементов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в синфазном (а) и противофазном (б) режимах

Для аналитического доказательства сосуществования синфазного и противофазного синхронных режимов в системе, исходная модель (1) была упрощена: $\varepsilon=0$, а нелинейные функции $F(x_n, y_n)$ в правых частях уравнений (1) заменены на их кусочно-линейные аппроксимации:

$$F'(x_n, y_n) = \begin{cases} -4/3x_n - 2 - y_n, & \text{для } x_n \leq -1 \\ 2/3x_n - y_n, & \text{для } -1 < x_n < 1 \\ -4/3x_n + 2 - y_n, & \text{для } x_n \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Тогда из нелинейной системы 4-го порядка для двух элементов получим кусочно-линейную систему второго порядка:

$$\begin{cases} 0 = F'(x_1, y_1) + \beta(x_2 - x_1) \\ \bullet \\ y_1 = x_1 + a_1 \\ 0 = F'(x_2, y_2) + \beta(x_1 - x_2) \\ \bullet \\ y_2 = x_2 + a_2 \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, изображающие точки в соответствующих фазовых пространствах обоих элементов все время проводят в интервалах $-2 < x_n < -1$ (пассивная фаза) и $1 < x_n < 2$ (активная фаза). Переходы из одной фазы в другую происходят мгновенно. Тогда в данной системе возможно четыре случая взаимного расположения элементов на цикле:

«++» - оба элемента находятся в активной фазе

«+-» - первый элемент расположен в активной фазе, второй - в пассивной

«-+» - первый элемент расположен в пассивной фазе, второй - в активной

«--» - оба элемента находятся в пассивной фазе

Для каждого из этих случаев упрощенная система имеет аналитическое решение. «Сшивая» решения с различных временных интервалов, можно получить состояние системы (3) в произвольный момент времени по заданным начальным условиям. Таким образом было построено отображение разности $df(n+1) = y_2(t_{n+1}) - y_1(t_{n+1})$ в момент времени t_{n+1} - момент (n+1)-го перехода из пассивной фазы в активную первым элементом от такой же разности в момент t_n - момент n-го перехода из пассивной фазы в активную первым элементом. Наличие неподвижной точки в таком отображении означает существование синхронного режима с соответствующей разностью df . Для различных значений параметра связи были численно построены данные отображения (Рис. 2). При малой связи в системе существует два различных синхронных режима (синфазный ($y_2 - y_1 \approx 0$) и противофазный). При большой связи – только синфазный режим.

В цепочке 3-х связанных элементов было обнаружено сосуществование четырех устойчивых режимов глобальной синхронизации: синфазного режима и трех смешанных режимов. В каждом из смешанных режимов два из трех элементов колеблются синфазно, а 3-й осциллирует в противофазе к ним. Таким образом, при увеличении длины цепочки на один элемент, количество синхронных режимов удвоилось, так как новый элемент может быть синхронизован синфазно и противофазно с соседним. Тогда логично предположить, что в цепочке из N элементов возможно сосуществование 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации. Для проверки этого предположения были рассмотрены 4 связанных элемента. В цепочке были обнаружены все 8 предполагаемых синхронных режимов (Рис. 3).

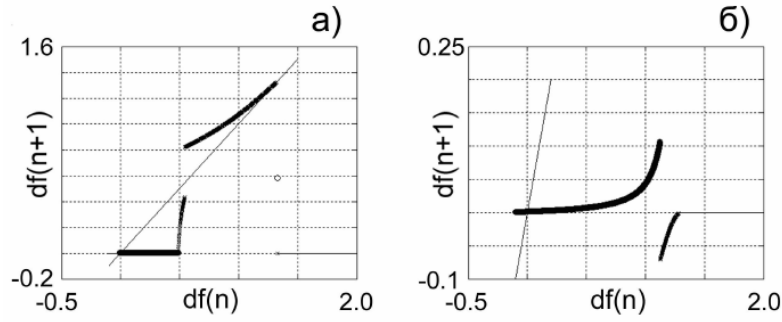


Рис. 2. Отображение разности df для слабой связи $\beta=0.002$ (а) и сильной связи $\beta=0.05$ (б) в системе 2 элементов.

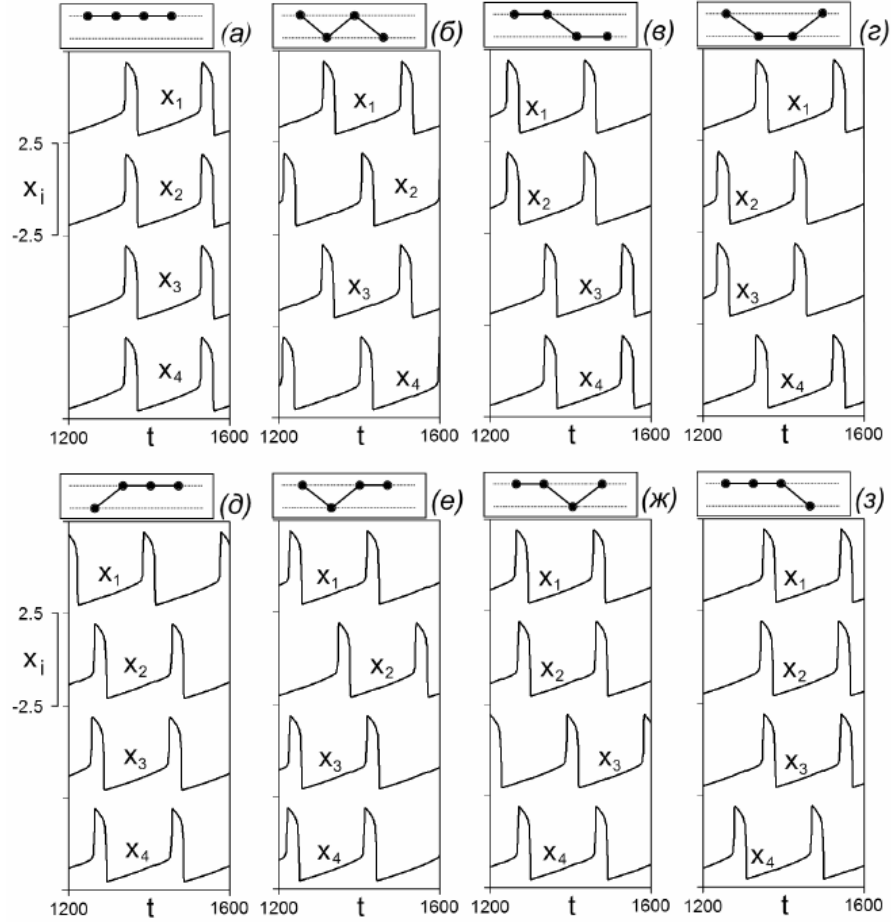


Рис. 3. Восемь устойчивых синхронных режимов в системе (1) четырех связанных элементов: синфазный режим $\Omega_a=0.033131$ (а); противофазный режим $\Omega_b=0.032255$ (б); смешанные режимы: $\Omega_v=0.032740$ (в), $\Omega_r=0.032744$ (г), $\Omega_d=0.032583$ (д), $\Omega_e=0.032613$ (е), $\Omega_{\text{ж}}=0.032633$ (ж), $\Omega_z=0.032661$ (з). $\varepsilon=0.02$, $a_1=0.995$, $\Delta=0.00007$, $\beta=0.0055$, периодические граничные условия.

Для исследования синхронизации в больших ансамблях была рассмотрена цепочка из 50 связанных элементов с линейным распределением значений параметра a : $a_{i+1} = a_i - i\Delta$. Полученные при ее исследовании результаты позволяют предположить что при некоторых значениях параметров возможно существование 2^{N-1} различных устойчивых режимов глобальной синхро-

низации. В численных экспериментах было найдено несколько таких режимов (Рис. 4а).

Численно показано, что если связь недостаточна для установления глобальной синхронизации, формируются группы элементов, имеющих одинаковые частоты колебаний. Этот эффект известен как кластерная синхронизация (Рис. 4б).

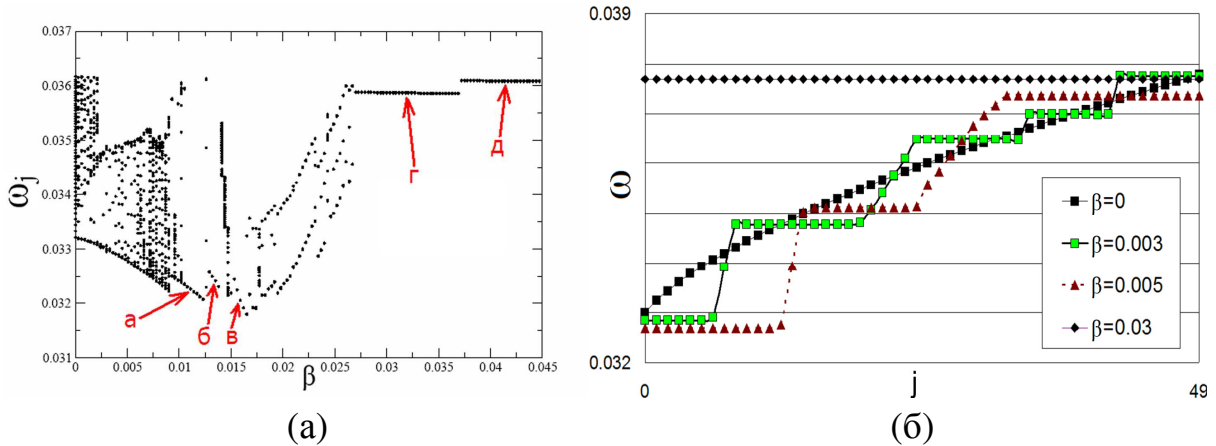


Рис 4. (а) Зависимость частот элементов от параметра связи $a_1=0.995$, $\Delta=0.001$, $\varepsilon=0.02$ (а, б, в, г - смешанные синхронные режимы, д - синфазный синхронный режим); (б) Кластерная и глобальная синфазная синхронизация в цепочке из 50 элементов при $a_1=0.995$, $\Delta=0.001$, $\varepsilon=0.02$.

В цепочке с периодическими граничными условиями был обнаружен синхронный режим, имеющий более высокую частоту, чем синфазный синхронный режим. Этот режим обусловлен наличием волны возбуждения, бегущей по кольцу элементов. Частота определяется периодом обращения волны (Рис. 5).

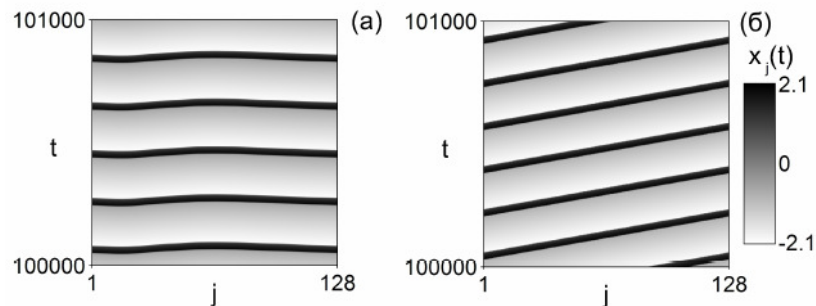


Рис. 5. Пространственно-временные диаграммы синфазного режима (а) и режима, обусловленного распространением волны возбуждения по цепочке элементов с периодическими граничными условиями (б).

В двумерной решетке локально связанных элементов кроме уже описанных режимов синхронных могут возникать синхронные режимы, обусловленные существованием волн, реализующихся в двумерных средах. В частности в решетке 100×100 элементов со свободными концами были обна-

ружены два режима, характеризующиеся распространением волн возбуждения в системе: режим, характеризующийся одной concentрической волной, распространяющейся от самого быстрого элемента в решетке (именно его ритм становится ведущим для всей решетки); и режим, обусловленный существованием спиральной волны в решетке. Характерные распределения x_{ij} в этих режимах показаны на Рис. 6а (concentрическая волна) и Рис. 6б (спиральная волна)

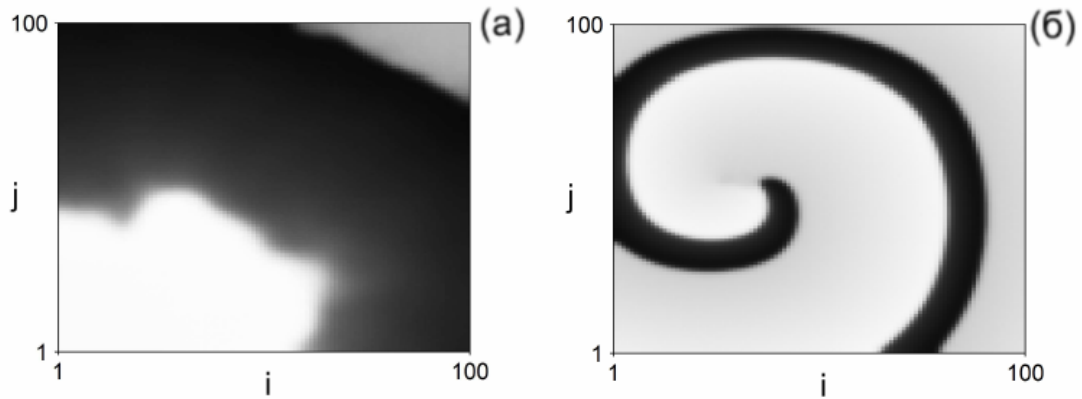


Рис. 6. Характерное распределение x_{ij} в синхронном режиме с одной concentрической волной (а) и в режиме с одной спиральной волной (б).

Таким образом, в системе Бонхоффера-Ван Дер Поля индивидуальная динамика элемента является причиной сосуществования синхронных режимов в ансамблях элементов.

Во **второй главе** рассматриваются цепочки локально диффузионно связанных слабонелинейных неидентичных осцилляторов Ван Дер Поля:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j = \mu(1 - x_j^2)y_j - (1 + \mu\Omega_j)x_j + \\ + \mu\alpha(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + \mu\beta(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) \\ j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (4)$$

где N - количество элементов в цепочке, Ω_j - параметр, определяющий частоту j -го элемента, параметр $\mu \ll 1$ определяет нелинейность системы, α и β - консервативная и диссипативная составляющие связи соответственно. В работе анализируется коллективная динамика системы при граничных условиях «свободные концы» и периодических граничных условиях.

В цепочке с линейным распределением индивидуальных частот элементов ($\Omega_{j+1} - \Omega_j = \Delta$) при $|\alpha| \ll |\beta|$ теоретически получены:

- частота синхронизации

$$\omega_s = \omega_1 + \frac{\Delta(N-1)}{2} \left(1 + \frac{M}{60} + O(M^3)\right)$$

- максимум фазовой расстройки

$$\max_j \{\varphi_{j+1} - \varphi_j\} = \lambda \varphi'_{\max} = \frac{\Delta N^2}{8\beta} \left(1 - \frac{19M^2}{57600} + O(M^3)\right)$$

- положение максимума фазовой расстройки в цепочке

$$j_m = \left(\frac{N}{2} \left(1 - \frac{7M^2}{480} + O(M^3)\right)\right)$$

$$\text{где } M = \frac{\alpha N^3 \Delta}{\beta^2}$$

В цепочке из 32 слабонелинейных элементов Ван Дер Поля в численных экспериментах найдено несколько синхронных режимов при периодических граничных условиях и «свободных концах» (Рис. 7). Среди них синфазный и противофазный режимы, а также ряд смешанных режимов. При добавлении каждого нового элемента в цепочку он может синхронизоваться как синфазно, так и противофазно с соседним.

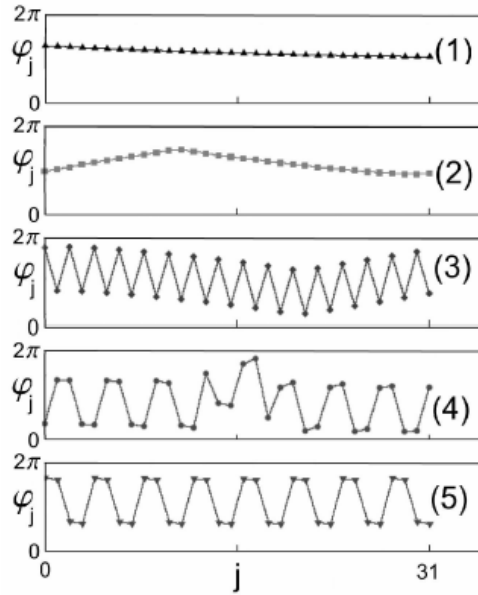


Рис. 7. Характерные распределения фаз элементов синхронных режимов в различных синхронных режимах: (1) – синфазный синхронный режим, граничные условия «свободные концы»; (2) – синфазный режим, периодические граничные условия; (3) – противофазный режим, периодические граничные условия; (4) – смешанный режим, «свободные концы»; (5) – смешанный режим, периодические граничные условия.

То есть в цепочке из 2 элементов наблюдается сосуществование 2 синхронных режимов, и при добавлении нового элемента в цепочку число синхронных режимов удваивается. Таким образом, в цепочке из N элементов возможно сосуществование до 2^{N-1} устойчивых режимов глобальной синхронизации.

При слабой связи поведение системы характеризуется кластерной синхронизацией. При этом чем меньше связь, тем больше кластеров в цепочке.

При исследовании синхронизации в цепочке неидентичных слабонелинейных элементов Ван Дер Поля было обнаружено, что при определенных значениях параметров существует режим, в котором распределение фаз постоянно меняется, но практически все время в цепочке существует область около центра, в которой элементы синхронизованы противофазно, и существуют области около краев, элементы в которых синхронизованы синфазно (Рис. 8а). Данный режим был назван чередующимся режимом синфазной/противофазной синхронизации, поскольку размеры противофазной (G_1) и синфазной (G_2) областей меняются периодически (Рис. 8б). Это говорит о том, что в системе присутствуют волны переключения режимов синхронизации.

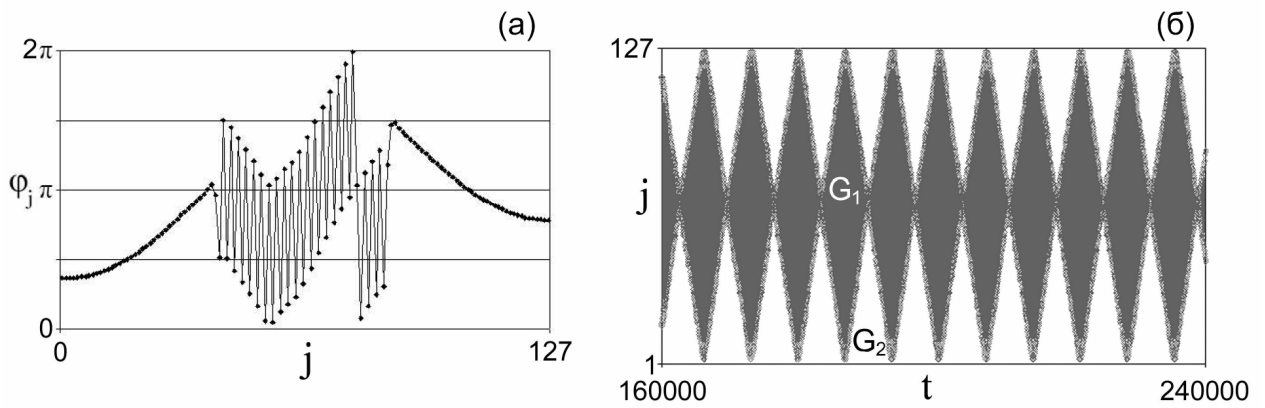


Рис. 8. (а) Типичное мгновенное распределение фаз в системе (4) в режиме чередующейся синфазной-противофазной синхронизации ($N=128$, $\mu=0.1$, $\alpha=0.3$, $\beta=0.01$, $\Delta=2 \cdot 10^{-6}$); (б) Эволюция областей противофазной синхронизации G_1 (выделены темным цветом) и областей синфазной синхронизации G_2 (выделены светлым цветом) ($N=128$, $\mu=0.1$, $\alpha=0.3$, $\beta=0.01$, $\Delta=2 \cdot 10^{-6}$)

Таким образом, в цепочке связанных слабонелинейных элементов Ван Дер Поля наличие двух типов связей приводит к мультистабильности синхронных режимов.

Третья глава посвящена исследованию синхронизации в ансамбле неидентичных элементов, описываемых уравнениями маятникового типа, связанных через сигналы взаимных рассогласований:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_j = y_j \\ \dot{y}_j = -\lambda y_j - \sin \varphi_j + \gamma_j + d(\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + \sin(\varphi_{j-1} - \varphi_j)) \\ j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (5)$$

где N – количество элементов в цепочке, порядок системы – $2N$, d – сила связи между элементами, λ – диссипация, γ_j – внешнее воздействие (постоянное

во времени). Неидентичность элементов определяется различными значениями γ_j .

В рассматриваемой системе могут реализовываться (а) режим “быстрой синхронизации”, обусловленный синфазной синхронизацией элементов в цепочке и (б) режимы “медленной синхронизации”, при которых в цепочке распространяется одна или несколько солитоноподобных структур. Также возможен режим существования когерентных структур, осциллирующих во времени, для которых характерно синхронное изменение динамических переменных для центральных элементов в структурах и симметричных относительно центральных элементов.

Режимы, указанные выше, могут сосуществовать при одних и тех же значениях параметров, и реализация того или иного режима обуславливается начальными условиями. То есть в системе имеет место мультистабильность глобальных синхронных режимов. В цепочке из $N=128$ элементов при $d=8.86$, $\lambda=0.4$ и равномерном случайном распределении γ_j в интервале $[0.9006, 0.9012]$ при начальных условиях $\phi_j=0$, $y_j=5$ реализуется режим синфазной синхронизации. Если в качестве начальных условий выбрать $\phi_j^0=4\arctg(\exp(j-N/2)h)$, $y_j^0=0$, $j=1, \dots, N$, то через некоторое время в системе наблюдается солитоноподобная волна, распространяющаяся вдоль цепочки и отражающаяся от свободных концов. Аналогично можно получить режим с несколькими солитоноподобными структурами. В таких режимах характерный временной масштаб в системе сильно превышает период синфазной синхронизации, поэтому синфазный режим называют “быстрой синхронизацией”, а режимы, обусловленные наличием солитоноподобных структур – “медленной синхронизацией”.

Для оценки нижней границы количества режимов в цепочке длины N , разобьем ее на несколько блоков M , в каждом из которых заведомо можно задать солитоноподобную структуру, которая будет распространяться и беспрепятственно проходить через другие. Определенная конфигурация структур обуславливает тот или иной режим. Положим, что при $M=K$ сосуществует L режимов, и определим, сколько режимов становится при $M=K+1$. При $M=K+1$ становятся доступны конфигурации из $K+1$ структур. Поскольку каждая из них может быть направлена как в одну, так и в другую сторону, добавляем 2^{K+1} конфигураций. Из соображений пространственной симметрии остается половина этих режимов, таким образом, остается 2^K новых режимов. Так, в цепочке из $M=4$ блоков существует $2^{4-1}=8$ новых режимов. С учетом режима “быстрой синхронизации”, а также того, что в цепочке из большего количества блоков заведомо могут реализовываться режимы из цепочек с меньшим числом блоков, всего в цепочке из M блоков возможно сосуществование не менее 2^M различных режимов глобальной синхронизации. Характерное мгновенное распределение y_j в некоторых таких режимах (с одной, двумя и четырьмя солитоноподобными структурами) показаны на Рис. 9а.

Зависимость периода T от силы связи d показана на Рис. 9б. Период в синфазном режиме практически не зависит от силы связи и близок к средне-

му индивидуальному периоду вращений отдельных элементов. Период режимов «медленной» синхронизации уменьшается с возрастанием силы связи. Это происходит потому что с увеличением d растет скорость распространения солитоноподобных структур по цепочке, соответственно, период обращения структуры в цепочке уменьшается.

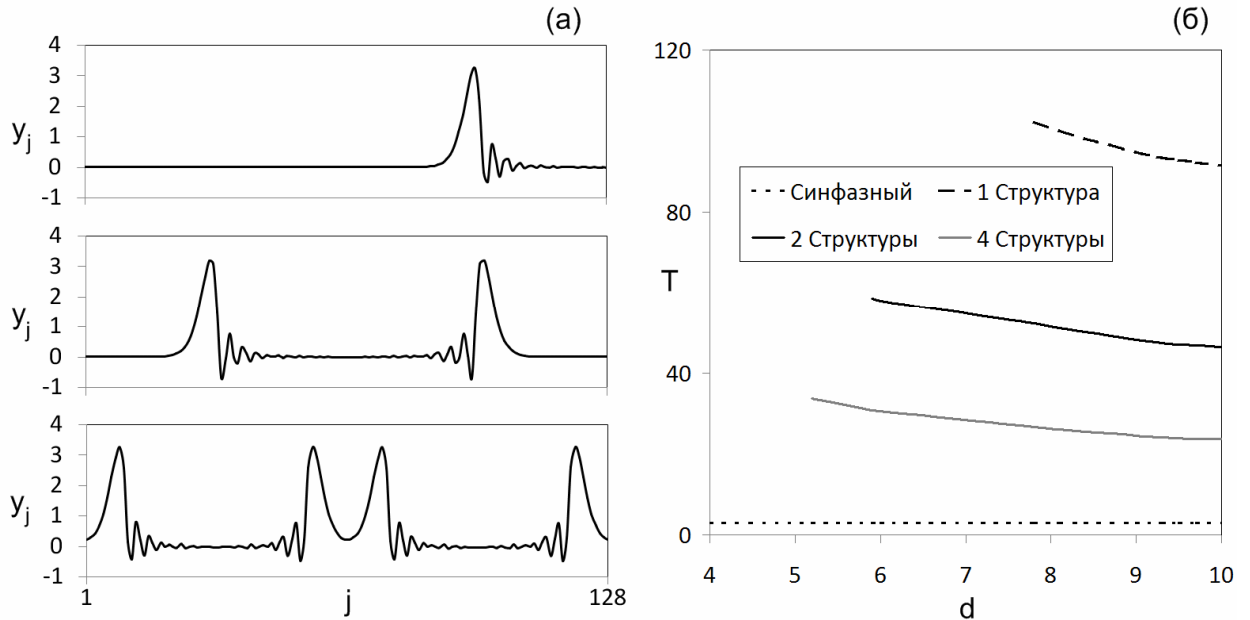


Рис. 9. (а) Характерные мгновенные распределения y_j в цепочке в режимах с одной, двумя и четырьмя солитоноподобными структурами; (б) Зависимость периода глобальной синхронизации T от силы связи d в режимах синфазной синхронизации и с одной, двумя и четырьмя солитоноподобными структурами. Точечная линия соответствует синфазному синхронному режиму, пунктирная – режиму с одной солитоноподобной структурой, черная сплошная – режиму с двумя солитоноподобными структурами, серая сплошная – режиму с четырьмя солитоноподобными структурами

В экспериментах обнаружен не наблюдавшийся в других системах эффект: в некотором интервале d среднее время между максимумами в синфазном режиме увеличивается, образуя своеобразный холм (Рис. 10а). Режим с увеличенным периодом получается в результате бифуркации удвоения периода колебаний и характеризуется изменением динамики элементов: замедлением самих осцилляций, а также разделением максимумов на «сильные» и «слабые» (Рис. 10б). Одной из важных особенностей режима с разделением максимумов является то, что для большинства элементов когда j -й элемент имеет «сильный» максимум, $j-1$ и $j+1$ тоже имеют максимум, но «слабый». Когда же j достигает «слабого» максимума, $j-1$ и $j+1$ имеют «сильный» максимум. Поэтому данный режим можно назвать противофазным.

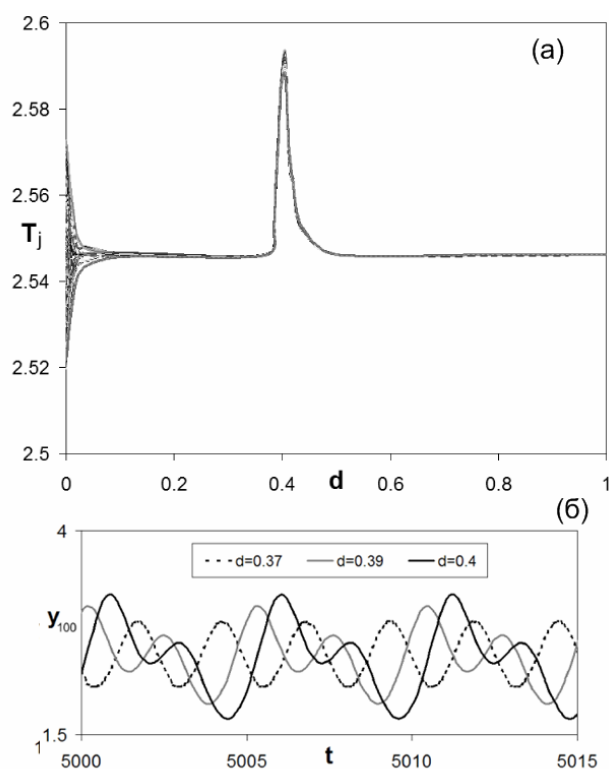


Рис. 10. (а) Зависимость среднего времени между максимумами T_j в синфазном режиме от силы связи d ; (б) характерные осцилляции $y(t)$ при различных значениях силы связи.

В **заключении** приведены основные результаты, полученные в диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Изучена синхронизация в цепочках и решетках осцилляторов Бонхоффера-Ван дер Поля. В результате исследований сделан вывод, что в ансамбле из N связанных автоколебательных элементов при фиксированных значениях параметров может сосуществовать не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации. Сосуществование 2^{N-1} синхронных режимов аналитически доказано при $N=2$ и численно подтверждено для $N \leq 4$.
2. Показано, что определенные конфигурации связей могут приводить к существованию других синхронных режимов. Так, в цепочках с периодическими граничными условиями возможно существование режима, обусловленного волной возбуждения, бегущей по кольцу в системе и задающей ритм всем элементам цепочки. В двумерных ансамблях также возможны режимы, принципиально отличающиеся от режимов в цепочках. Так, в решетке существует режим, при котором ритм задается спиральной волной.
3. Исследована динамика цепочек консервативно и диссипативно связанных слабо нелинейных осцилляторов Ван дер Поля. Как и в случае модели Бонхоффера-Ван дер Поля, в цепочке из N элементов при фиксированных

значениях параметров может сосуществовать не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации. Однако, если в ансамблях элементов Бонхоффера-Ван дер Поля мультистабильность синхронных режимов вызвана особенностями индивидуальной динамики элемента, то в системе слабонелинейных осцилляторов Ван дер Поля мультистабильность обусловлена структурой связи между элементами. Режимы могут быть следующими:

- а) режим глобальной синфазной синхронизации. При этом имеет место определенный сдвиг фаз между соседними элементами. Таким образом, в цепочке происходит распространение волновых фронтов.
 - б) режим глобальной противофазной синхронизации,
 - в) синхронные режимы, при которых часть пар соседних элементов колеблется в фазе, часть пар – в противофазе.
4. В ходе численных экспериментов обнаружено, что при определенных значениях параметров в цепочке слабо нелинейных осцилляторов Ван дер Поля может реализовываться режим чередования во времени синфазной и противофазной синхронизации, обусловленной наличием распространяющихся фронтов переключения режимов синхронизации. Такие «солитоноподобные» структуры обнаружены в широкой области параметров связи.
5. Исследована синхронизация в цепочке неидентичных элементов, описываемых уравнениями маятникового типа и связанных через сигналы взаимных фазовых рассогласований. Обнаружено наличие мультистабильности синхронных режимов. Численно показано, что при определенных параметрах возможно сосуществование следующих синхронных режимов: состояния глобальной синфазной синхронизации (также называемой «быстрой» синхронизацией) и синхронных режимов, обусловленных существованием в цепочке солитоноподобных структур («медленной» синхронизации). Показано, что количество сосуществующих синхронных режимов имеет показательную зависимость от длины цепочки. В экспериментах обнаружены все 16 синхронных режимов, сосуществование которых предполагалось в системе из 128 элементов. С ростом связи в цепочке элементов маятникового типа обнаружен и описан эффект разрушения синфазного синхронного режима и возникновения противофазного режима.
6. Исследована динамика рассматриваемых систем при значениях связи, недостаточных для глобальной синхронизации. Получено, что переход к глобальной синхронизации осуществляется через формирование и укрупнение кластеров синхронизации с увеличением связи.

СПИСОК РАБОТ ПО ДИССЕРТАЦИИ

1. Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В., Мультистабильность синхронных режимов в цепочке связанных осцилляторов Бонхоффера-Ван-дер-Поля, Вестник Нижегородского Университета им. Н.И. Лобачевского

- серия Радиофизика; Издательство Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского; Нижний Новгород; 2005.
2. A.K. Kryukov, V.S. Petrov, L.S. Averyanova, G.V. Osipov, W. Chen, O. Drugova, and C.K. Chan, Synchronization phenomena in mixed media of passive, excitable and oscillatory cells, *Chaos* **18**, 037129 (2008).
 3. A.K. Kryukov, G.V. Osipov, A.V. Polovinkin, and J. Kurths, Synchronous regimes in an ensemble of coupled Bonhoeffer-Van der Pol oscillators, *Phys. Rev. E* **79**, 046209 (2009).
 4. Крюков А.К., КанакOV О.И., Осипов Г.В., Волны синхронизации в ансамблях слабонелинейных осцилляторов, *Изв. ВУЗов Прикладная Нелинейная Динамика*, Саратов, **17**, 1, стр.13-36 (2009).
 5. Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В., Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: Два элемента, *Изв. ВУЗов Прикладная Нелинейная Динамика*, Саратов, **17**, 2, стр.16-28 (2009).
 6. Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В., Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: Цепочка и решетка связанных элементов, *Изв. ВУЗов Прикладная Нелинейная Динамика*, Саратов, **17**, 2, стр.29-36 (2009).
 7. А.В. Половинкин, А.К. Крюков, Восстановление квазиоптимального сигнала возбудимых систем по предшествующим реализациям шума, *Изв. ВУЗов Радиофизика* **LIII**, 1, стр. 60-75 (2010)
 8. A.K. Kryukov, G.V. Osipov, A.V. Polovinkin, and J. Kurths, Synchronous regimes in a chain of coupled Bonhoeffer-van der Pol oscillators, *NOLTA*, 2006, Bologna, Italy
 9. A.K. Kryukov, O.I. Kanakov, G.V. Osipov, and J. Kurths, Multistability of synchronous regimes in oscillatory ensembles, *International symposium on synchronization in complex networks SynCoNet2007*, Leuven, Belgium, 2007.
 10. Крюков А.К., Осипов Г.В., Мультистабильность синхронных режимов в цепочках связанных осцилляторов, *Труды XI научной конференции по радиофизике, посвященной 105-летию со дня рождения М.Т. Греховой*, изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2007.
 11. Kryukov A.K., Osipov G.V., and Polovinkin A.V., Variety of synchronous regimes in ensembles of neuron-like oscillators, *Труды XI научной конференции по радиофизике, посвященной 105-летию со дня рождения М.Т. Греховой*, изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2007.
 12. A.K. Kryukov, G.V. Osipov, and J. Kurths, Multistability of synchronous regimes in oscillatory ensembles, *International IEEE Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon 2007) Abstract collection*, Potsdam, 2007.
 13. А.К. Крюков, О.И. КанакOV, Г.В. Осипов, Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов, *Материалы итоговой научной конференции ВМК и Мехмата 2007*, Нижний Новгород, 2007.

14. А.К. Крюков, О.И. Канаков, Г.В. Осипов, Синхронные режимы в цепочках слабонеидентичных осцилляторов, Тезисы докладов XIV научной школы "Нелинейные волны - 2008", отпечатано в типографии ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2008.
15. Polovinkin A.V. and Kryukov A.K., The quasi-optimal activation in the systems of stochastic excitable elements, Joint Symposium on International Workshop on Nonlinear Dynamics in Biological Systems and Soft-matter Biophysics Days, Taipei, 2009.
16. А.К. Крюков, Г.В. Осипов, Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях элементов маятникового типа, Труды XIV научной конференции по радиофизике, изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2010, с.38-39.

Оглавление диссертации

Введение

Глава 1. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных релаксационных осцилляторов

- 1.1. Модель
- 1.2. Динамика одного элемента Бонхоффера-Ван Дер Поля
- 1.3. Два связанных элемента
- 1.4. Синхронные режимы в цепочке из трех элементов
- 1.5. Четыре связанных элемента
- 1.6. Синхронизация в больших одномерных ансамблях
- 1.7. Решетка связанных элементов: спиральные и концентрические волны
- 1.8. Выводы

Глава 2. Волны синхронизации в ансамблях слабонелинейных осцилляторов Ван Дер Поля

- 2.1. Модель
- 2.2. Синхронизация в дискретном аналоге уравнения Гинзбурга-Ландау
- 2.3. Два связанных элемента
- 2.4. Синфазная синхронизация в цепочке: теория
- 2.5. Синхронные режимы в цепочке: компьютерный эксперимент
- 2.6. Синфазная-противофазная синхронизация
- 2.7. Выводы

Глава 3. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях элементов маятникового типа

- 3.1. Модель
- 3.2. Динамика одного элемента
- 3.3. Цепочка связанных элементов
 - 3.3.1. Состояния равновесия в цепочке
 - 3.3.2. «Быстрая» синхронизация в цепочке

- 3.3.3. «Медленная» синхронизация в цепочке
- 3.4. Кластерная синхронизация. Противофазный режим
- 3.5. Выводы

Заключение

Литература

Список работ по диссертации

Приложение